

# 國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

結合 Hull-White 利率模型與求面積法評價雪球  
型債券

**Pricing Snowball Notes with Hull-White Model  
and Quadrature Methods**

研究生：王志勳

指導教授：鍾惠民 博士

戴天時 博士

中華民國九十六年七月

結合求面積法與 Hull-White 利率模型評價雪球型債券

**Pricing Snowball Notes with Hull-White Model and  
Quadrature Methods**

研究生: 王志勛

Student: Chih-Hsun Wang

指導教授: 鍾惠民博士

Advisor: Dr. Huimin Cheng

戴天時博士

Dr. Tian-Shyr Dai

國立交通大學

財務金融研究所碩士班

碩士論文

A Thesis

Submitted to Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Finance

July 2007

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年七月

# 結合求面積法與 Hull-White 利率模型評價雪球型債券

學生：王志勳

指導教授：鐘惠民 博士

戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

2007 年 7 月

## 摘 要

Hull-White 利率模型以三元樹表達短期利率變化，其假設短期利率在各離散時間上有持平、上漲或下跌一單位( $\Delta R$ )三種走勢，然而事實上，利率經過一段時間( $\Delta t$ )後的可能走勢不該只有三種。本文利用求面積法(Quadrature methods)將 Hull-White 三元樹延伸至多元樹，以減少分配誤差所造成的錯誤評價。並針對市場上交易的雪球型利率連債券提出一個創新的數值方法，處理其高度路徑相關的債息問題，搭配 Hull-White 多元樹狀結構來評價之。

**關鍵字：**Hull-White 模型、求面積法、分配誤差、雪球型利率連動債券。

# **Pricing Snowball Notes with Hull-White Model and Quadrature Methods**

Student: Chih-hsun Wang

Advisors: Dr. Huimin Cheng  
Dr. Tian-Shyr Dai

Institute of Finance  
National Chiao Tung University  
July 2007

## **ABSTRACT**

Hull-White trinomial tree model could implement short rate term structure; however, only three branches in lattices method may cause distribution error. Thus, we use Quadrature methods to extend a trinomial tree to a multinomial tree. Based on Quadrature method with Hull-White multinomial tree, we can effectively decrease the pricing error from distribution error. In this thesis, we provide a novel polynomial-time method based on a Hull-White multinomial tree to price sophisticated snowball notes with path-dependent coupons.

**Keywords: Hull-White model; Quadrature methods; distribution error;  
snowball notes •**

## 誌 謝

感謝鍾惠民老師和戴天時老師的指導，我的論文才能順利過關。在寫論文的這段日子，特別感謝小慈，她釐清了我不少錯誤的觀念，在程式方面也給我很大的幫助。還有一起補托福的維峻、一起弄論文的小光以及一起打球的阿師、賴 Q、大娘和學弟們，謝謝你們的陪伴及支持。最後還要感謝好咖團，有你們的陪伴讓我的碩士生涯更多彩多姿、更多歡樂。希望財金所同學們都能身體健康，在未來有很好的發揮。

王志勛 謹致於

交通大學財務金融研究所

民國九十六年七月

# 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	v
表目錄.....	vi
第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究流程與論文架構.....	2
第二章 文獻探討.....	3
第一節 利率模型.....	3
第二節 評價方法.....	7
第三節 求面積法(Quadrature methods). ....	9
第三章 研究方法.....	12
第一節 應用求面積法(Quadrature methods)建構 Hull-White 多元樹.....	12
第二節 評價雪球型利率連動債券.....	15
第四章 實證分析與敏感度分析.....	27
第一節 雪球型利率連動債券合約.....	27
第二節 評價雪球型利率連動債券.....	29
第三節 敏感度分析.....	35
第五章 結論與建議.....	38
參考文獻.....	39

## 圖目錄

圖(2.2.1)	Hull-White 三元樹的三種利率走勢.....	8
圖(2.3.1)	利用求面積法(Quadrature methods)評價歐式買權.....	10
圖(3.1.1)	計算多元樹的最大最小可能利率.....	12
圖(3.1.2)	調整多元樹的最大最小可能利率.....	13
圖(3.1.3)	第一階段平行樹.....	13
圖(3.1.4)	求算節點(i,j)的分枝機率.....	14
圖(3.2.1)	雪球型利率連動債券.....	15
圖(3.2.2)	由路徑計算票面利率.....	17
圖(3.2.3)	計算各節點的(M,m).....	18
圖(3.2.4)	計算各節點的(M,m)及考慮下限 $K_1$ .....	21
圖(3.2.5)	計算各節點的債券現值.....	22
圖(3.2.6)	計算 a 不等於 $0^*$ 的債券現值.....	23
圖(3.2.7)	計算 a 等於 $0^*$ 的債券現值.....	25
圖(3.2.8)	利用線性內插法求算債券現值.....	26
圖(4.2.1)	零息利率方程式.....	30
圖(4.3.1)	波動度 $\sigma$ 對雪球型債券價格的影響.....	35
圖(4.3.2)	利率回歸速度 a 對雪球型債券價格的影響.....	36
圖(4.3.3)	零息利率對雪球型債券價格的影響.....	37
圖(4.3.4)	贖回期間對雪球型債券價格的影響.....	37

## 表 目 錄

表(4.2.1)	自 2006/3/1 起的零息利率.....	29
表(4.2.2)	由表(4.2.1)轉換的遠期利率.....	30
表(4.2.3)	四年期上限買權之波動度報價.....	32
表(4.2.4)	四年期上限買權之現金價格.....	33
表(4.2.5)	四年期利率上限之現金價格.....	34



# 第一章 緒論

## 第一節 研究背景與動機

早期一般衍生性商品標的物以股票價格、綜合指數及原物料為主，甚少報酬取決於利率的利率衍生性商品。西元 1980 至 1990 間，國際金融市場利率衍生性商品交易量開始快速增加，我國也在民國 82 年開放銀行利率交換，以及後續的台幣利率衍生性商品，至今許多符合顧客特殊需求的利率衍生性商品也已經被設計出來。許多擁有高槓桿的衍生性商品雖然獲利能力強，同樣承受高風險，從 1980 中期，衍生性商品市場出現一些重大虧損事件，如 LTCM 及 Orange County，衍生性商品的正確定價與避險工作就顯得格外重要。本文利用 Hull-White 利率模型評價在市場交易的贖回式雪球型債券，以作為發行機構定價此債券及投資人選擇投資的參考。

雪球型連動債券是一種結構型商品，結合了固定收益債券和利率衍生性商品，因此債券會隨著參考利率的變化而改變價值。雪球型利率連動債券一般第一年配高於市場存款利率的票面利率吸引投資大眾，第二年起票面利率為前一期票面利率加上固定利差(Spread)再減去某浮動利率，故為高度路徑相依的利率衍生性商品，而且發行機構又可在特定時間將債券以票面價值提前贖回，這些複雜的條款使得雪球型債券的評價相當困難。雪球型債券最大特色為票面利率與前一期票面利率有關，前一期票面利率高，當期票面利率高的機率就會大一點，因此配息就像雪球越滾越大，相對地，如果前一期票面利率太低，配息也會像雪球一樣融化。此外，雪球型債券擁有反浮動的特性，對於看低此浮動利率的投資者，不失是個投資的好機會。

評價利率衍生性商品的方法大致可區分成下列幾類：封閉公式解、樹狀結構(Lattice methods)、PDE(Partial differential equation)等數值方法及蒙地卡羅法。封

閉公式通常在標的物的隨機結構模型不複雜，且被評價的衍生性商品結構不複雜才會存在。而雪球型債券高度路徑相依以及可提前贖回的特性，讓評價公式變得十分難推導。至於蒙地卡羅法因為無法處理提前贖回的條款而不適合。使用樹狀結構法最大好處為可以很容易處理提前贖回的問題，但是採用的利率期間結構如果太複雜，例如 HJM 或是 BGM 這些非馬可夫過程(Non-Markov process)的利率模型，則會創造出節點無法合併(Non-recombining)的利率樹，會造成利率樹的規模大到無法使用電腦處理，因此我們選擇已經發展出利率樹的利率期間結構，例如 Hull-White 利率模型，配合求面積法(Quadrature methods)來減少分配誤差，以及創新的數值方法來處理雪球型高度路徑相依的債息和評價。

## **第二節 研究流程與論文架構**

第一章 緒論:描述研究背景與動機。

第二章 文獻探討:探討與本文相關的利率模型、利率衍生性商品以及求面積法。

第三章 研究方法:介紹一種創新的數值方法結合 Hull-White 利率模型如何評價雪球型利率連動債券。

第四章 實證分析與敏感度分析：針對市場上交易的雪球型利率連動債券進行實證分析，並且探討 Hull-White 利率模型對價格的影響。

第五章 結論與建議：對本文研究結果提出結論以及後續可深入研究的方向。

## 第二章 文獻探討

本文利用 Hull and White 利率模型評價雪球型利率連動債券，並引用求面積法(Quadrature methods) 將利率三元樹擴展到多元樹。本章介紹與評價方法相關的利率模型、利率衍生性商品以及求面積法。

### 第一節 相關利率理論

#### (一) Black's 模型

Black-Scholes 模型自 1973 年發表以來，被廣泛應用到外匯選擇權、指數選擇權、期貨選擇權的評價工作上。Black's 模型則是將 Black-Scholes 模型延伸至利率領域。

考慮以價值  $V$  的變數為標的資產之歐式選擇權，定義

$T$ : 選擇權的到期期間

$F$ : 到期日為  $T$  的契約中  $V$  的遠期價格

$F_0$ :  $F$  在時間零的價值

$K$ : 選擇權的執行價格

$P(t,T)$ : 在時間  $T$  支付 \$1 的零息債券於時間  $t$  的價格

$V_t$ :  $V$  在時間  $T$  的價值

$\sigma$ :  $F$  的波動度

假設  $\ln V_t$  為服從期望值為  $F_0$ ，變異數為  $\sigma\sqrt{T}$  的常態分配，則買權在時間零的價值為

$$c=P(0,T)[F_0N(d_1)-KN(d_2)] \quad (2.1.1)$$

賣權在時間零的價值為

$$p=P(0,T)[KN(-d_2)-F_0N(-d_1)] \quad (2.1.2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[F_0/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_0/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

## (二) 利率上限(Interest rate caps)

利率上限是一種金融機構經常於店頭市場發行的利率選擇權，被設計用來避免利率不斷上升的損失。利率上限是由一組履約價格相同，但到期日不同的上限買權(Caplets)所組成，即一個發行期間為  $T$  的利率上限，其本金為  $L$ ，上限水準  $K_{cap}$ ，重設日期為  $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}=T$ ，設  $r_k$  為介於  $t_k$  到  $t_{k+1}$  之間，在時間  $t_k$  觀察到的利率水準 ( $k=1, 2, \dots, n$ )，可分解為  $n$  個上限買權，對應的報酬支付時間為  $t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}$ 。

上限買權對應於時間  $t_k$  觀察到的利率，會於時間  $t_{k+1}$  支付如下的報酬

$$L\delta_k \max(r_k - K_{cap}, 0) \quad (2.1.3)$$

其中  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ ，若假設  $r_k$  服從指數常態分配，波動度  $\sigma_k$ ，則上式可藉由 Black's 模型得到上限買權於時間零的價值為

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - K_{cap} N(d_2)] \quad (2.1.4)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[F_k/K_{cap}] + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_k/K_{cap}] - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

$F_k$  為  $t_k$  到  $t_{k+1}$  的遠期利率。

同時，也可將利率上限視為一組零息債券賣權組成的投資組合，推導如下，  
 (2.1.3)的報酬會於  $t_{k+1}$  支付，在時間  $t_k$  會等值於

$$\frac{L\delta_k}{1+r_k\delta_k}\max(r_k - k_{cap}, 0)$$

上式可改寫為

$$\begin{aligned} \frac{L\delta_k}{1+r_k\delta_k}\max(r_k - K_{cap}, 0) &= L\max\left(\frac{\delta_k(r_k - K_{cap})}{1+r_k\delta_k}, 0\right) \\ &= L\max\left(\frac{1+\delta_k r_k - \delta_k K_{cap} - 1}{1+r_k\delta_k}, 0\right) \\ &= L\max\left(\frac{(1+\delta_k r_k) - (\delta_k K_{cap} + 1)}{1+r_k\delta_k}, 0\right) \\ &= L\max\left(1 - \frac{(1+\delta_k K_{cap})}{1+r_k\delta_k}, 0\right) \\ &= \max\left(L - \frac{L(1+\delta_k K_{cap})}{1+r_k\delta_k}, 0\right) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

即代表一個到期日為  $t_k$  的賣權，執行價格  $L$ ，標的資產為一張票面價格為  $L(1+\delta_k K_{cap})$ ，到期日為  $t_{k+1}$  的零息債券。因此利率上限可被視為一組以零息債券為標的的歐式賣權投資組合。

### (三) Hull-White 模型

Hull-White 模型為無套利模型之一，無套利模型以當期市場的利率期間結構作為模型的輸入值，讓整個模型完全符合當期市場的利率，因此無套利模型的平移項(Drift term)通常為時間的函數，讓期初零息債曲線會影響模型中未來短期利率的平均路線。

Hull-White 模型假設利率  $r$  的隨機過程為

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$$

或是

$$dr = a\left(\frac{\theta(t)}{a} dt - r\right) + \sigma dz$$

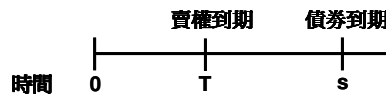
其中  $a, \sigma$  為常數， $\sigma$  為短期利率的波動度， $z$  為一布朗運動， $\theta(t)$  為使模型符合期初期間結構的時間函數。此模型可視為 Vasicek 模型加上隨時間變動的利率回歸水準  $\frac{\theta(t)}{a}$ 。在時間  $t$ ，短期利率會以  $a$  的速率回復到  $\frac{\theta(t)}{a}$  的利率水準， $\theta(t)$  可由期初期間結構推出

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

其中  $F(0, t)$  為在時間零觀察到，於時間  $t$  到期的瞬間遠期利率，下標  $t$  表對  $t$  做偏微分。最後一項通常非常小，如果將之忽略，這個式子隱含利率  $r$  在時間的  $t$  的平移項為  $F_t(0, t) + a(F(0, t) - r)$ ，因此利率  $r$  的平均變動會遵循期初瞬間遠期利率曲線的斜率。

### 評價零息債券歐式選擇權

利用 Hull-White 模型評價零息債券歐式選擇權，考慮一個以本金  $L$ ，在時間  $s$  到期的零息債券為標的物的歐式賣權，且賣權的到期日為時間  $T$



此賣權在時間零的價值為

$$LP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h) \quad (2.1.6)$$

其中

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

如前所述，利率上限可以表示為一組上限買權的投資組合或是一組零息債券選擇權的投資組合，即利用(2.1.4)和(2.1.6)式子評價。因此可藉由市場利率上限的報價來校正 Hull-White 模型的參數  $a, \sigma$ 。

## 第二節 評價方法

Hull 和 White(1994)提出穩定的兩階段法建立三元樹，可以廣泛地用來表示很多不同的單因子模型。兩階段法將連續型隨機過程的 Hull-White 模型以間斷型的隨機過程表達，以下分別介紹兩階段的三元樹。

### (一) 第一階段

Hull-White 模型假設瞬間短期利率  $r$  服從

$$dr=(\theta(t)-ar)dt+\sigma dz$$

假設利率樹每期時間間隔為常數  $\Delta t$ ，且  $\Delta t$  期的利率  $R$  與利率  $r$  有相同隨機過程

$$dR=(\theta(t)-aR)dt+\sigma dz$$

第一階段為建立期初值為零， $\theta(t)$  為零，且對稱於  $R^*=0$ ，服從如下  $R^*$  隨機過程的三元樹

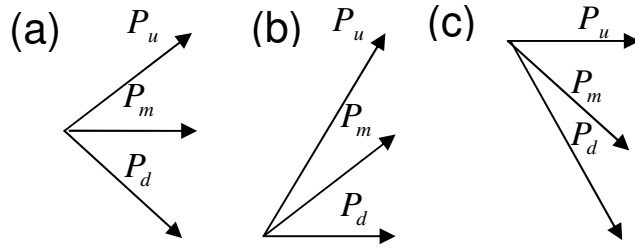
$$dR^*=-aR^*dt+\sigma dz$$

$R^*(t+\Delta t)-R^*(t)$  服從期望值為  $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為  $\sigma^2\Delta t$  的常態分配，亦即

$$E(\Delta R^*)=E(R^*(t+\Delta t)-R^*(t))=-aR^*(t)\Delta t$$

$$\text{Var}(\Delta R^*)=\text{Var}(R^*(t+\Delta t)-R^*(t))=\sigma^2\Delta t$$

定義  $\Delta R=\sigma\sqrt{3\Delta t}$  為利率樹上的利率間距，且任一節點  $(i,j)$  代表時間為  $i\Delta t$ ，利率  $R^*$  為  $j\Delta R^*$  的節點。在第一階段下，當期的利率變化到下一期，會有三種走勢，當變數  $j$  夠大時必須改用圖(2.2.1)(c)走勢，相對地，當  $j$  夠小時則採圖(2.2.1)(b)的走勢，其餘狀況利率走勢採用(a)，這是因為利率具有回歸平均值的特性，節點的走勢會隨著當時利率高低而改變。



圖(2.2.1)Hull-White 三元樹的三種利率走勢

## (二) 第二階段

第一階段建構的利率樹和當時市場所觀察到的利率期間結構並不相同，所以第二階段要將  $R^*$  上的節點能完全符合期初利率期間結構，把  $R^*$  三元樹轉為  $R$  三元樹，定義  $\alpha_i$  為  $\alpha(i\Delta t)$ ，是  $R$  在  $R$  三元樹中  $i\Delta t$  時的利率減去對應的  $R^*$  三元樹中  $R^*$  在  $i\Delta t$  時的利率。 $Q_{i,j}$  為一個在利率走到節點  $(i,j)$  時支付 \$1，否則報酬為零的商品之現值。 $\alpha_i$  與  $Q_{i,j}$  可以在期初期間結構完全吻合的條件下以前推法 (Forward induction) 求出，得到下列公式。

$$\alpha_i = \frac{\ln \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}} Q_{m,j} e^{-j\Delta R\Delta t} - \ln P_{i+1}}{\Delta t} \quad (2.2.1)$$

其中  $P_{i+1}$  為在  $(i+1)\Delta t$  到期的零息債券價格， $n_i$  為三元樹在  $i\Delta t$  時，變數  $j$  的最大值。一旦  $\alpha_i$  決定了， $Q_{i+1,j}$  由下列公式算出。

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t] \quad (2.2.2)$$

其中  $q(k,j)$  為節點  $(i,k)$  走到節點  $(i+1,j)$  的機率。

算出每一期的  $\alpha_i$  後，搭配由市場利率上限報價校正出的  $a$ 、 $\sigma$  常數參數，便得到與市場一致的利率樹。



### 第三節 求面積法(Quadrature methods)

Andricopoulos 等(2002)指出使用二元樹或三元樹等數值方法，皆是以間斷型分配去近似連續型分配，當切割的格子點不夠細，將會面臨分配誤差，使得評價不準確，所以 Andricopoulos 等(2002)提出一種新的數值方法，求面積法(Quadrature)，將可解決數值方法經常遭遇的分配誤差(Distribution error)以及非線性誤差(Nonlinearity error)。求面積法雖然在某些概念與樹狀結構法(Lattice methods)及有限差分法(Finite difference methods)相近，但求面積法更加準確且更有效率，尤其是評價間斷監控選擇權類型(Discretely monitored options)的商品。第三章將會說明如何應用求面積法使得 Hull-White 三元樹延伸至多元樹的概念，此章節先介紹 Andricopoulos 等(2002)如何利用求面積法評價一般歐式買權。

考慮 Black-Scholes 偏微分方程式，假設股價  $S$  服從幾何布朗運動

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.3.1)$$

其中  $S$  為目前股價， $V(S,t)$  為無發放股利歐式買權在時間  $t$  的價值， $t$  為時間， $T$  為到期日時間， $r$  為無風險利率， $\sigma$  為股價波動度， $E$  為買權的履約價。

接著將式子(2.3.1)做下列變數變換

$$\begin{aligned} x &= \ln(S_t/E) \\ y &= \ln(S_T/E) = \ln(S_{t+\Delta t}/E) \end{aligned}$$

則期末買權報酬由  $V(S_T, T) = (S_{t+\Delta t} - E)^+$  變成  $V(y, T) = (Ee^y - E)^+$ ，而買權在時間  $t$  的價值為

$$V(x, t) = E(e^{-r\Delta t} V(y, t+\Delta t)) = A(x) \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y) V(y, t+\Delta t) dy \quad (2.3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\Delta t}} \exp\left(\frac{1}{2}kx - \frac{1}{8}\sigma^2(k+2)^2\Delta t - r\Delta t\right) \\ B(x, y) &= \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta t} + \frac{1}{2}ky\right) \quad k = \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \end{aligned}$$

式子(2.3.2)中的積分式對於較複雜的新奇選擇權，並沒有解析解，必須訴諸於數

值積分。Andricopoulos 等(2002)選擇辛普森積分法(Simpson's rule)，因為其收斂速度較梯形法快，且穩定。進行此數值積分時，會有兩個主要問題，第一個問題為當  $y$  遠大於  $x$  時， $B(x,y)$  會快速逼近零，故 Andricopoulos 等(2002)建議  $y$  的積分範圍必須從正負無限大切割至一個合理的範圍，因為經過變數轉換的  $x$  服從常態分配，選擇積分範圍為起始值  $x_0$  加減十倍標準差已經是相當足夠了。第二個問題為我們必須考慮期末報酬  $V(y,t+\Delta t)$  中不連續點的存在，否則辛普森積分法不會得到平穩的收斂值，在處理一般歐式買權時，期末報酬  $V(y,t+\Delta t)$  的一階導數很明顯地在  $y=0(S=E)$  時不連續，為了避免非線性誤差影響數值方法的準確性，我們將  $y$  的積分範圍從不連續點分成兩部份，定義  $b$  為  $y$  在不連續點經過變數轉換後的值，亦即  $b=\ln(E/E)=0$ ，以及  $y$  的積分範圍上下限

$$y_{\max}=x+10\sigma\sqrt{\Delta t} \quad , \quad y_{\min}=x-10\sigma\sqrt{\Delta t}$$

和  $[y_{\max}, b]$  區間  $\delta y$  走的步數  $N^+$ ， $[b, y_{\min}]$  區間  $\delta y$  走的步數  $N^-$

$$N^+ = \lceil \frac{y_{\max}-b}{\delta y} \rceil \quad , \quad N^- = \lceil \frac{y_{\min}-b}{\delta y} \rceil$$

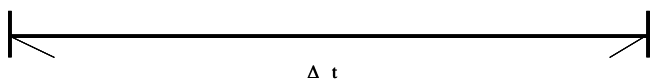
其中  $\lceil a \rceil$  表取最接近  $a$  的整數。

因為  $y$  低於  $b$  的買權報酬皆等於零，對於積分式(2.3.2)並沒有貢獻，故當在處理歐式買權下，取  $N^-=0$ ，根據以上條件以及辛普森積分法，可得

$$\begin{aligned} V(x,t) &= A(x) \int_{-\infty}^{\infty} B(x,y)V(y,t+\Delta t)dy \approx A(x) \int_0^{b+N^+\delta y} B(x,y)V(y,t+\Delta t)dy \\ &\approx \frac{A(x)\delta y}{6} \{ B(x,0)V(0,t+\Delta t) + 4B(x, \frac{1}{2}\delta y)V(\frac{1}{2}\delta y,t+\Delta t) \\ &\quad + [\sum_{i=1}^{N^+-1} 2B(x,i\delta y)V(i\delta y,t+\Delta t) + 4B(x,(i+\frac{1}{2})\delta y)V((i+\frac{1}{2})\delta y,t+\Delta t)] + B(x,N^+\delta y)V(N^+\delta y,t+\Delta t) \} \end{aligned}$$

利用上式，如圖(2.3.1)，我們可以很輕易移除非線性誤差，且當  $\delta y$  夠小時，也可以排除分配誤差。下一章將說明如何應用求面積法至 Hull-White 利率模型。

$$\begin{aligned}
 & x = \ln(S_t/E) \quad * \\
 & \quad \downarrow \\
 V(x,t) \approx & \frac{A(x)\delta y}{6} \{ B(x,0)V(0,t+\Delta t) + 4B(x,\frac{1}{2}\delta y)V(\frac{1}{2}\delta y,t+\Delta t) + \\
 & [\sum_{i=1}^{N^+-1} 2B(x,i\delta y)V(i\delta y,t+\Delta t) + 4B(x,(i+\frac{1}{2})\delta y)V((i+\frac{1}{2})\delta y,t+\Delta t)] \\
 & + B(x,N^+\delta y)V(N^+\delta y,t+\Delta t) \}
 \end{aligned}$$



Δ t

$y=N^+\delta y$  \*  
 $\vdots$   
 $\vdots$   
 $y=2\delta y$  \*  
 $y=3/2\delta y$  \*  
 $y=\delta y$  \*  
 $y=1/2\delta y$  \*  
 $y=0$  \*

}

$V(y \geq 0, t+\Delta t) = E(e^y - 1)$

}

$V(y < 0, t+\Delta t) = 0$

圖(2.3.1) 利用求面積法(Quadrature methods)評價歐式買權

### 第三章 研究方法

#### 第一節 應用求面積法(Quadrature methods)建構 Hull-White 多元樹

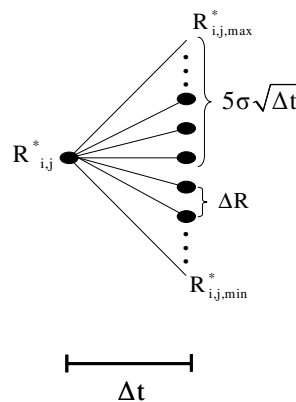
在 Hull-White 建構三元樹的第一階段中， $R^*(t+\Delta t)-R^*(t)$  服從期望值為  $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為  $\sigma^2\Delta t$  的常態分配，是以三元樹近似此常態分配，也就是經過一單位時間  $\Delta t$ ， $\Delta R^*$  只有三種可能值，但利率經過  $\Delta t$  後的可能走勢不該只有三種，當  $\Delta t$  太大時，分配誤差將會顯著地影響評價的準確度。故我們考慮在 Hull-White 第一階段中加入求面積法的概念，讓三元樹能擴展至多元樹。

#### (一) 第一階段

一樣建構對稱於  $R^*=0$ ，服從  $dR^*=-aR^*dt+\sigma dz$  隨機過程的平行利率樹，定義  $R_{ij}^*$  為節點  $(i,j)$  的短期利率， $R_{i,j,\max}^*$  為節點  $(i,j)$  至  $(i+1)\Delta t$  最大的可能利率， $R_{i,j,\min}^*$  為節點  $(i,j)$  至  $(i+1)\Delta t$  最小的可能利率，亦即

$$R_{i,j,\max}^* = R_{ij}^* + q^* = R_{ij}^* + 5\sigma\sqrt{\Delta t} \quad , \quad R_{i,j,\min}^* = R_{ij}^* - q^* = R_{ij}^* - 5\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$\Delta R = \sqrt{\Delta t}/k$  為利率的間隔， $k$  為正整數，為了要將三元樹延伸至多元樹，我們必須限制  $q^* > \Delta R \Rightarrow k > 1/5\sigma$ ，如圖(3.1.1)所示

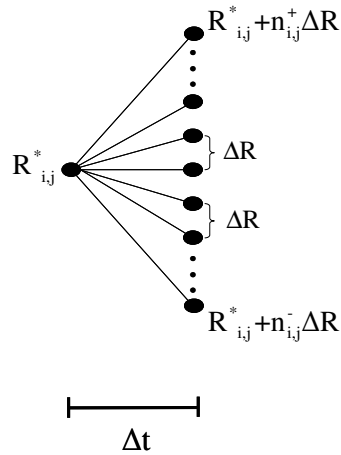


圖(3.1.1) 計算多元樹的最大最小可能利率

$R_{ij}^*$  經過  $\Delta t$  後，最大的可能利率  $R_{i,j,\max}^*$  及最小的可能利率  $R_{i,j,\min}^*$

但  $q^* = 5\sigma\sqrt{\Delta t}$  不一定會被  $\Delta R$  整除，所以定義  $n_{ij}^+$  為節點  $(i,j)$  至  $(i+1)\Delta t$  最大可能利率距離  $R_{ij}^*$  的步數，同理， $n_{ij}^-$  為節點  $(i,j)$  至  $(i+1)\Delta t$  最小可能利率距離  $R_{ij}^*$  的步數，這樣才保證節點會重合在一起(Recombine)，如圖(3.1.2)。  $n_{ij}^+$ ， $n_{ij}^-$  公式如下

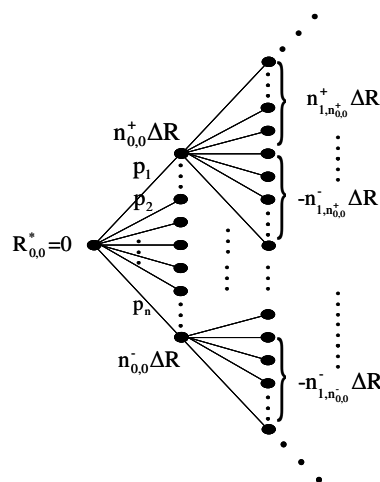
$$n_{ij}^+ = \left\lceil \frac{R_{ij,\max}^* - R_{ij}^*}{\Delta R} \right\rceil, \quad n_{ij}^- = \left\lceil \frac{R_{ij,\min}^* - R_{ij}^*}{\Delta R} \right\rceil$$



圖(3.1.2) 調整多元樹的最大最小可能利率

$R_{ij,\max}^*$  調整為  $R_{ij}^* + n_{ij}^+ \Delta R$ ， $R_{ij,\min}^*$  調整為  $R_{ij}^* + n_{ij}^- \Delta R$

如此我們可以建造出第一階段的多元平行樹，如圖(3.1.3)

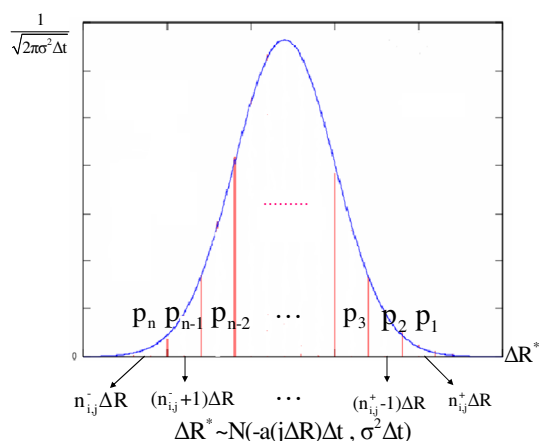


圖(3.1.3) 第一階段平行樹

假設每一節點會有  $n$  條分枝， $p_1, p_2 \dots p_n$  為其對應的機率，因為  $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$  服從期望值為  $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為  $\sigma^2\Delta t$  的常態分配，我們利用辛普森積分法求出每個節點對應的  $p_1 \cdot p_2 \dots p_n$ ，即

$$p_1 = \int_{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad p_2 = \int_{(n_{ij}^+ - 1.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad \dots \quad p_n = \int_{(n_{ij}^- - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^- + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*)$$

如圖(3.1.4)。



圖(3.1.4) 求算節點(i,j)的分枝機率

利用辛普森積分法求算節點(i,j)的  $p_1, p_2 \dots p_n$

越高的節點(i,j)會有越大的變數  $j$ ，所求得的  $p_1$  會越小，即再往上的機率越小，相反地，越低的節點(i,j)會有越小的變數  $j$ ，再往下的機率越小，恰能反映出 Hull-White 利率模型回歸平均值的特性。

## (二) 第二階段

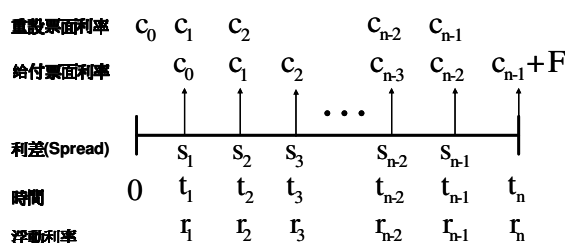
同 Hull-White 三元樹的第二階段，利用式子(2.2.1)和(2.2.2)計算每一期的調整利率  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，建構與期初利率期間結構相同的利率樹。

## 第二節 評價雪球型利率連動債券

考慮如圖(3.2.1)所示的雪球型債券，第  $i$  期所設定的票面利率  $C_i$  為第  $i-1$  期所設定的票面利率  $C_{i-1}$  加上第  $i$  期利差(spread) $S_i$  再減去第  $i$  期的浮動利率  $r_i$ ，且票面利率不得為負，亦即

$$C_i = (C_{i-1} + S_i - r_i)^+, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2.1)$$

$C_0$  為合約中載明的固定票面利率，且因為延遲給付條款， $C_i$  的支付時點為  $t_{i+1}$ 。



圖(3.2.1) 雪球型利率連動債券

在 Hull-White 樹狀結構下，節點  $(i,j)$  的短期利率可分解為  $\alpha_i + j\Delta R$ ，故式子(3.2.1)可改寫為

$$C_i = (C_{i-1} + S_i - (\alpha_i + K\Delta R))^+, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2.2)$$

其中  $K = -n_i, -n_i+1, \dots, 0, \dots, n_i-1, n_i$ ， $n_i$  為  $i\Delta t$  時最大的變數  $j$ ，因為雪球型債券的計息方式為高度路徑相依，如果選擇以到達節點  $(i,j)$  的路徑數作為計算債息的狀態變數 (state variable) 將會太複雜，不易處理，故我們利用短期利率在 Hull-White 利率模型下能以  $\alpha_i + j\Delta R$  型式表示的特性，以下三步驟來處理雪球型債券的債息與計算期初價格。

### (一) 第一步驟 計算節點 $(i,j)$ 的最大小可能債息

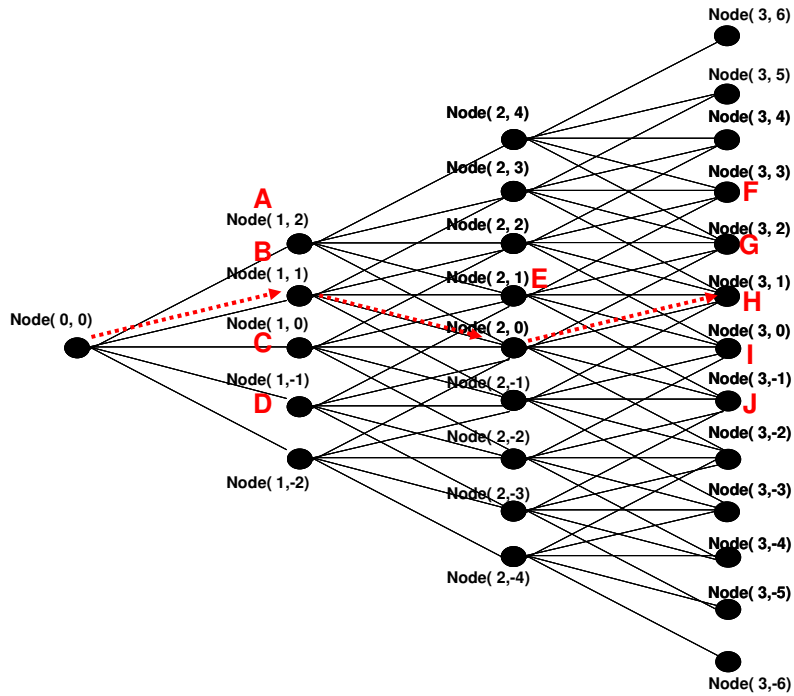
在第一步驟中，我們先忽略債息可能為負的狀況，故式子(3.2.1)可改寫為

$$\begin{aligned}
C_i &= (C_{i-1} + S_i - r_i) \\
&= ((C_{i-2} + S_{i-1} - r_{i-1}) + S_i - r_i) \\
&= (((C_{i-3} + S_{i-2} - r_{i-2}) + S_{i-1} - r_{i-1}) + S_i - r_i) \\
&\vdots \\
&= C_0 + \sum_{k=1}^i S_k - \sum_{k=1}^i r_k \\
&= C_0 + \sum_{k=1}^i S_k - \sum_{k=1}^i (\alpha_k + f_k \Delta R) \\
&= C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) - \sum_{k=1}^i f_k \Delta R \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

其中  $f_k$  為整數，由到達節點  $(i,j)$  的路徑決定。式子(3.2.3)中  $C_0 + \sum_{k=1}^i (C_k - \alpha_k)$  可視為常數，因此只要求出每個節點中  $\sum_{k=1}^i f_k$  的最大最小值，即可決定節點  $(i,j)$  的可能債息共有多少種可能。

在給一個求算  $\sum_{k=1}^i f_k$  的例子前，先定義節點  $(i,j)$  的父節點(Parents)、子節點(Children)、 $(M,m)$ 、 $C_{i,j}$ 。節點  $(i,j)$  的父節點為在  $(i-1)\Delta t$  時有連結到節點  $(i,j)$  的節點，節點  $(i,j)$  的子節點為在  $(i+1)\Delta t$  時有連結到節點  $(i,j)$  的節點，以五元樹為例，如圖(3.2.2)，節點 E 的父節點為節點 A、B、C、D，節點 E 的子節點為節點 F、G、H、I、J。每個節點  $(i,j)$  的  $(M,m)$  代表此節點的最大可能票面利率為  $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + M\Delta R$ ，最小可能票面利率  $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + m\Delta R$ ，即  $\sum_{k=1}^i f_k$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ 。 $C_{i,j}$  為節點  $(i,j)$  所有可能票面利率的集合。





圖(3.2.2) 由路徑計算票面利率

計算節點(3,1)的其中一種  $\sum_{k=1}^i f_k$

### 例子 3.1

如圖(3.2.2)，假設  $C_0, S_1, S_2, S_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  已知，則到達節點(3,1)的其中一條路徑為節點(0,0)至節點(1,1)至節點(2,0)至節點(3,1)，此時式子(3.2.3)中的  $\sum_{k=1}^i f_k \Delta R$  為

$\sum_{k=1}^3 f_k \Delta R = (f_1 + f_2 + f_3) \Delta R = (1 + 0 + 1) \Delta R = 2 \Delta R$ ，亦即  $C_{3,1}$  的其中一種票面利率等於

$$C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - \sum_{k=1}^3 f_k \Delta R = C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 2 \Delta R \quad \circ$$

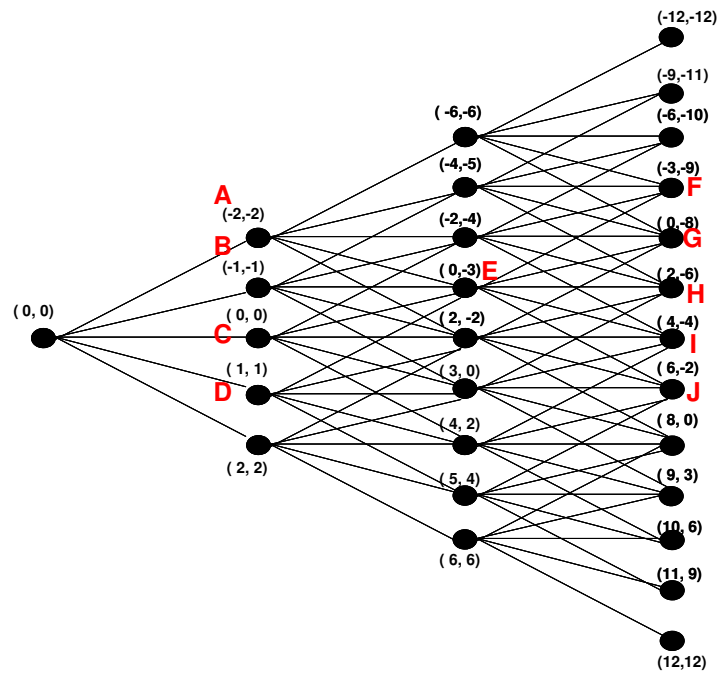
經過觀察後，因為雪球型債券具有逆浮動的特性，短期利率走低會使得債息上升，故節點(i,j)的最大債息會由節點(i,j)父節點的最低點中之最大債息提供，相對地，節點(i,j)的最小債息會由節點(i,j)父節點的最高點中之最小債息提供，見例子 3.2

### 例子 3.2

如圖(3.2.3)，節點 E 的最大票面利率會由父節點中的最低點節點 D 提供，由節點 D 中的 M 值再減去節點 E 的  $\Delta R$  高度(為 1)，故節點 E 的 M 值等於  $1-1=0$ ，最小票面利率會由父節點的最高點節點 A 提供，由節點 A 中的 m 值再減去節點 E 的  $\Delta R$  高度，故節點 E 的 m 值等於  $-2-1=-3$ ，所以節點 E 的 (M,m) 為 (0,-3)，即節

點(2,1)的所有可能票面利率  $C_{2,1} = \{ C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) + 0 * \Delta R, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 1 * \Delta R$

,  $C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 2 * \Delta R, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 3 * \Delta R \}$ ，以此類推，可以得到各節點的 (M,m)。



圖(3.2.3) 計算各節點的 (M,m)

### (二) 第二步驟 加入票面利率不得低於 0% 條款

在第一步驟中，我們先忽略票面利率不得低於 0% 的條款，而先求算各節點 (i,j) 的 (M,m)，所以在各節點 (i,j) 有至多  $M-m+1$  種的可能債息，因為部分可能債息會被此條款消除，第二步驟便是計算當在  $i\Delta t$  時，存在一個整數  $K_i$  為 (M,m) 的下限。一但在  $i\Delta t$  時，各節點的 (M,m) 有低於  $K_i$  的情況便會被消除，因為其所對應

的債息會低於零。  $K_i$  為滿足  $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + K_i \Delta R \geq 0$  的最小整數，亦即

$$K_i = \left\lceil -\frac{C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k)}{\Delta R} \right\rceil \quad (3.2.4)$$

根據第一步驟以及式子(3.2.4)求算在  $i\Delta t$  時，所有節點的  $(M,m)$  以及  $K_i$  後，會有三種調整情況，如下說明。

**情況一：**

$M,m$  皆大於等於  $K_i$ ，表示此節點的所有可能票面利率皆大於 0%，則此節點的  $(M,m)$  維持不變，共有  $M-m+1$  種可能債息。

**情況二：**

$(M,m)$  中有部份小於  $K_i$ ，表示此節點的可能票面利率有小於 0% 的部分，必須刪除，所以將  $m$  用  $K_i$  替代，並加入  $0^*$  這個符號，代表此節點有出現票面利率為 0% 的情況，則此節點的  $(M,m)$  由  $(M, K_i, 0^*)$  替代，共有  $M-K_i+2$  種可能債息。

**情況三：**

$(M,m)$  皆小於  $K_i$ ，代表此節點的可能票面利率皆小於 0%，則此節點  $(M,m)$  由  $(0^*, 0^*)$  替代，票面利率只有 0% 一種。

當節點  $(i,j)$  的父節點含有  $(0^*, 0^*)$ ，節點  $(i,j)$  的重設票面利率會為  $0 + S_i - (\alpha_i + j\Delta R)$  (因為前一票面利率為 0%)，為了統一  $(M,m)$  的格式，以及方便計算往後各節點的  $(M,m)$ ，必須將  $0 + S_i - (\alpha_i + j\Delta R)$  轉換成  $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + \delta_{i,j} \Delta R$  的形式，

其中  $\delta_{i,j}$  為整數，取

$$\delta_{i,j} = \left\lceil -\frac{C_0 + \sum_{k=1}^{i-1} (S_k - \alpha_k) + j\Delta R}{\Delta R} \right\rceil \quad (3.2.5)$$

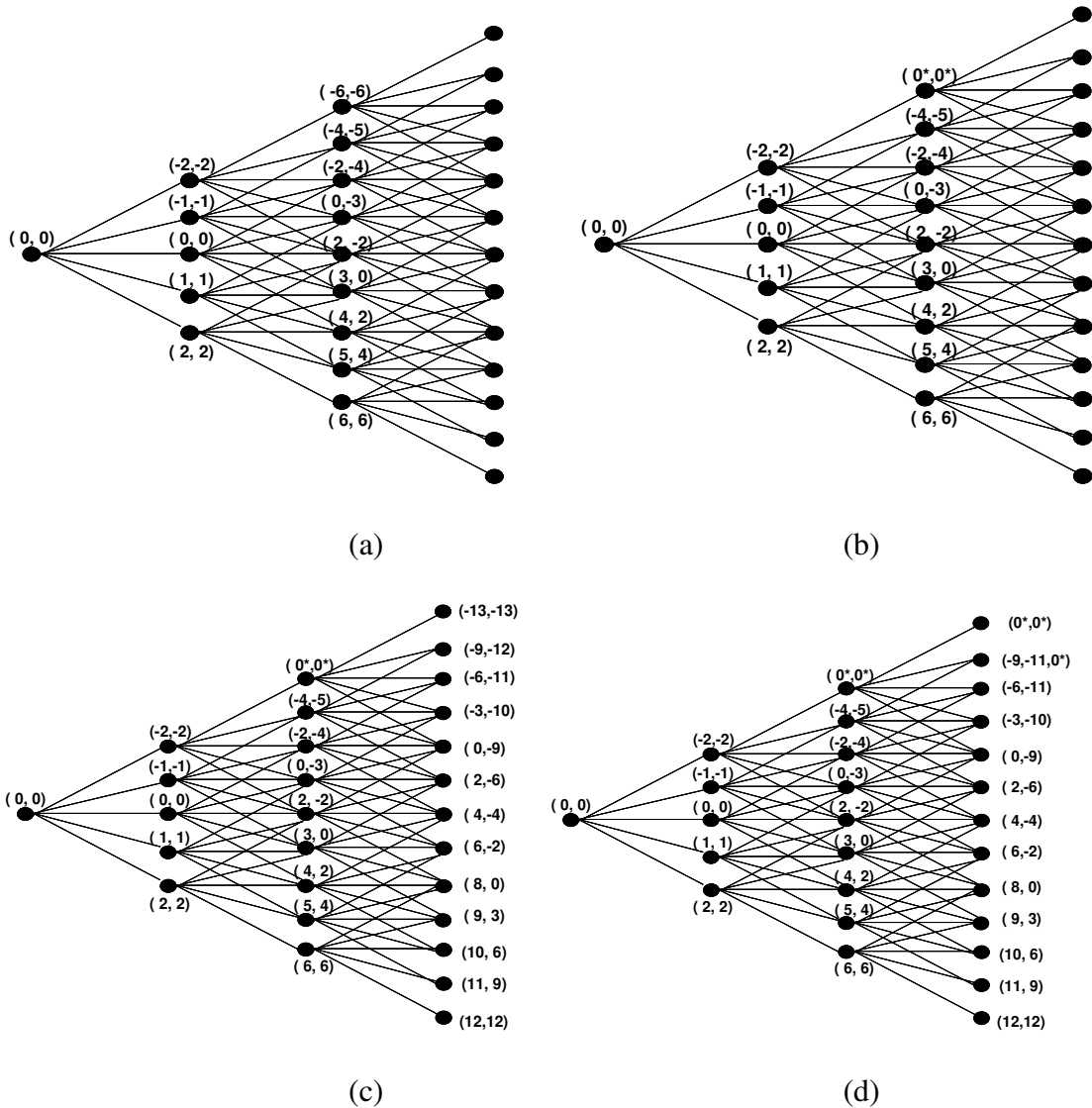
其中  $\lceil \cdot \rceil$  表下高斯函數， $\delta_{i,j}$  作為第三步驟中求算債券現值使用線性內插法的下

限，見例子 3.3

### 例子 3.3

如圖 (3.2.4)，假設  $C_0, S_1, S_2, S_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \Delta R$  已知，由式子 (3.2.4) 算出  $K_1 = \left\lceil -\frac{C_0 + S_1 - \alpha_1}{\Delta R} \right\rceil = -2$ ， $K_2 = \left\lceil -\frac{C_0 + S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2}{\Delta R} \right\rceil = -5$ ， $K_3 = \left\lceil -\frac{C_0 + S_1 + S_2 + S_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\Delta R} \right\rceil = -11$ 。

在  $\Delta t$  時，節點(1,2)、節點(1,1)、節點(1,0)、節點(1,-1)、節點(1,-2)的(M,m)皆大於等於  $K_1$ ，表示所有可能債息皆大於等於零，所以在  $\Delta t$  時的(M,m)都不改變範圍。在  $2\Delta t$  時，先根據第一步驟，求算各節點未考慮票面利率低於零的(M,m)，如圖(3.2.4)(a)所示，但因為  $K_2 = -5$ ，節點(2,4)的(M,m)皆小於  $K_2$ ，因此由(-6,-6)調整成(0\*,0\*)，其他節點則不變，如圖(3.2.4)(b)所示。在  $3\Delta t$  時，節點(2,4)的(M,m)為(0\*,0\*)，這會影響到節點(3,6)，節點(3,5)，節點(3,4)，節點(3,3)，節點(3,2)的(M,m)；節點(3,6)的 M, m 值都是由節點(2,4)提供，在節點(2,4)的票面利率為 0%，故節點(3,6)的票面利率為  $0 + S_3 - (\alpha_3 + 6\Delta R)$ ，根據式子 (3.2.5)，可得  $\delta_{3,6} = \left\lceil -\frac{C_0 + (S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2) + 6\Delta R}{\Delta R} \right\rceil = -13$ ，即節點(3,6)的(M,m)等於(-13,-13)。同理，節點(3,5)的 m 值會由節點(2,4)提供，故節點(3,5)的最小可能票面利率為  $0 + S_3 - (\alpha_3 + 5\Delta R)$ ，由式子(3.2.5)可得  $\delta_{3,5} = \left\lceil -\frac{C_0 + (S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2) + 5\Delta R}{\Delta R} \right\rceil = -12$ ，則節點(3,5)的 m 值等於-12。而  $\delta_{3,4} = \left\lceil -\frac{C_0 + (S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2) + 4\Delta R}{\Delta R} \right\rceil = -11$ ，則節點(3,4)的 m 值等於-11，同理得  $\delta_{3,3} = -10$ 、 $\delta_{3,2} = -9$  其他節點的(M,m)與節點(2,4)無關，所以根據第一步驟求算其他節點的(M,m)，如圖(3.2.4)(c)所示。之後再考慮  $3\Delta t$  時(M,m)的下限  $K_3 = -11$ ，得到如圖(3.2.4)(d)的結果。



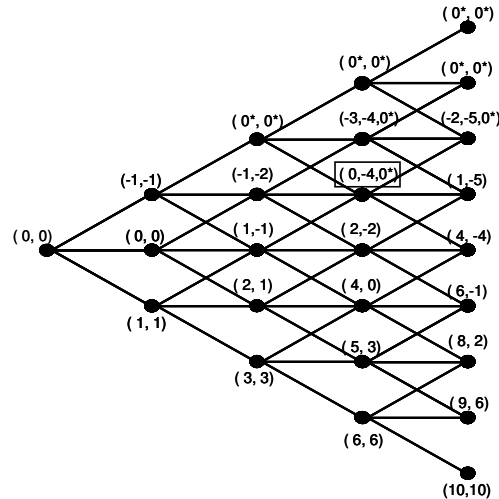
圖(3.2.4) 計算各節點的(M,m)及考慮下限  $K_i$

在時間  $i\Delta t$  時，我們可藉由第一步驟，求出尚未考慮票面低於零的(M,m)，再利用第二步驟，以  $K_i$  將票面利率低於零的部份消除，利用遞迴此兩步驟，則可得到整個利率樹所有節點的(M,m)。

### (三) 第三步驟 計算債券現值以及考慮贖回條款

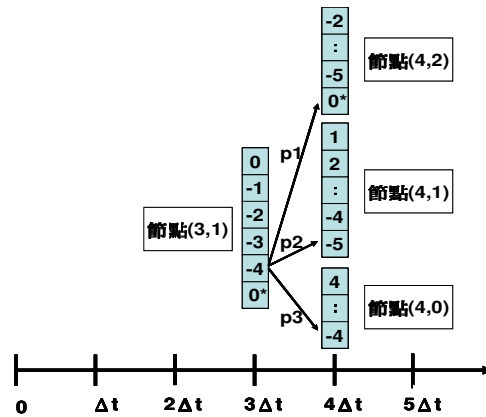
首先定義  $B(i,j,a)$  代表節點  $(i,j)$  之票面利率為  $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + a\Delta R$  的情況下 ( $m \leq a \leq M$ )，於  $(i+1)\Delta t$  時的債券現值。如圖(3.2.5)中，以三元樹為例，括號內為各

節點的(M,m)，節點(3,1) 於時點  $4\Delta t$  共有  $B(3,1,0)$ 、 $B(3,1,-1)$ 、...、 $B(3,1,-4)$ 、 $B(3,1,0^*)$  共六種可能的債券現值。以下分  $a$  不等於  $0^*$  和  $a$  等於  $0^*$  兩種情況，舉例說明如何使用後推法(Backward induction)求算  $B(i,j,a)$ 。

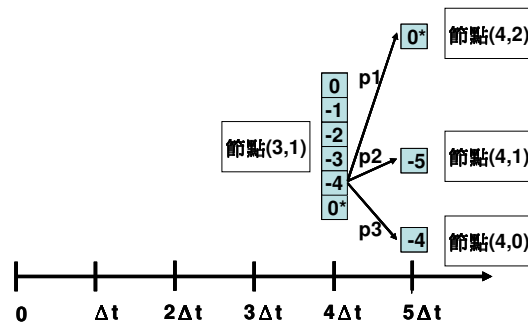


圖(3.2.5) 計算各節點的債券現值

將圖(3.2.5)中節點(3,1)和其子節點節點(4,2)、節點(4,1)、節點(4,0)轉換成圖(3.2.6)形式，圖(3.2.6)中的長條狀為節點(i,j)的所有可能  $a$  值， $m \leq a \leq M$ 。圖(3.2.6)(a)是根據重設票面利率的時點，跟圖(3.2.5)利率樹中各節點的(M,m)是互相對應的，但雪球型債券的債息是有延遲給付的特性，所以在  $3\Delta t$  所重設的票面利率會在  $4\Delta t$  的時點支付，見圖(3.2.6)(b)， $B(i,j,a)$  所定義的債券現值是根據圖(3.2.6)(b)。



(a)重設票面利率的時點



(b)實際支付債息的時點

圖(3.2.6) 計算 a 不等於 0\* 的債券現值

1.a 不等於 0\* 的情況：

考慮圖(3.2.6)(a)節點(3,1)中 a 等於-4 的情況，代表在  $4\Delta t$  時，其中一種可能的票面利率為  $C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R$ ，如圖(3.2.6)(b)所示。在  $3\Delta t$  時，節點(3,1)中 a 等於-4 的情況會對應到其子節點節點(4,2)中 a 等於-6(因為 -4-2)、節點(4,1)中 a 等於-5(因為 -4-1)、節點(4,0)中 a 等於-4(因為 -4-0)，機率分別為  $p_1, p_2, p_3$ ，但因為  $K_4 = -5$ ，對應到節點(4,2)中 a 等於-6 必須改成 a 等於  $0^*$ 。在求算  $B(3,1,-4)$  時，因為我們是使用後推法，此時  $B(4,2,0^*)$ 、 $B(4,1,-5)$ 、 $B(4,0,-4)$  是已知常數，則節點(3,1)中 a 等於-4 的情況於  $4\Delta t$  的債券現值為(  $5\Delta t$  不為債券到期日，F 為債券面額)

$$B(3,1,-4)=\min(p_1*B(4,2,0)*\frac{1}{1+(\alpha_4+2*\Delta R)}+p_2*B(4,1,-5)*\frac{1}{1+(\alpha_4+1*\Delta R)}+p_3*B(4,0,-4)*\frac{1}{1+(\alpha_4+0*\Delta R)},F) \\ + (C_0+\sum_{k=1}^3(S_k-\alpha_k)-4\Delta R)*F$$

如果  $5\Delta t$  為債券到期日，則

$$B(3,1,-4)=\min(p_1*(B(4,2,0)+F)*\frac{1}{1+(\alpha_4+2*\Delta R)}+p_2*(B(4,1,-5)+F)*\frac{1}{1+(\alpha_4+1*\Delta R)}+p_3*(B(4,0,-4)+F)*\frac{1}{1+(\alpha_4+0*\Delta R)},F) \\ + (C_0+\sum_{k=1}^3(S_k-\alpha_k)-4\Delta R)*F$$

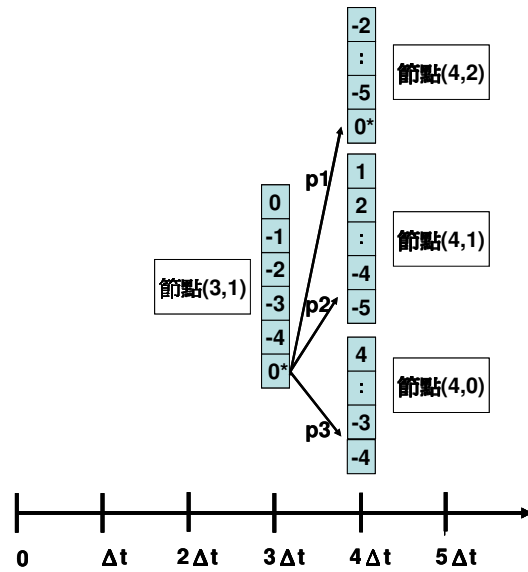
此時

$$B(4,2,0)=0*F, B(4,1,-5)=(C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)-5\Delta R)*F, B(4,0,-4)=(C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)-4\Delta R)*F$$

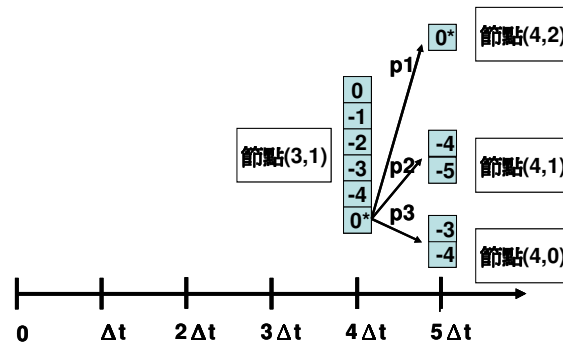
其中會取  $\min$  函數，是由於發行機構擁有以債券面額  $F$  贖回此債券的權利，故當算出的價值比面額  $F$  高時，發行機構將會執行贖回條款，債券現值至多為面額  $F$ ，而不管是否有執行贖回條款，債券持有人都會在  $4\Delta t$  時收到  $(C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)-4\Delta R)*F$  的債息，所以式子最後必須加上此債息。

至於折現利率的選擇是根據如下的說明，在此例子下，當在  $5\Delta t$  時會收到  $(C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)-4\Delta R)*F$  的債息，代表在  $4\Delta t$  時票面利率重設在節點(4,0)，此時短期利率為  $\alpha_4+0*\Delta R$ ，故以此利率折現；同理，當在  $5\Delta t$  時會收到  $(C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)-5\Delta R)*F$  的債息，代表在  $4\Delta t$  時票面利率重設在節點(4,1)，此時短期利率為  $\alpha_4+1*\Delta R$ ，故以此利率折現；最後一種情況為在  $5\Delta t$  時收到的債息為零，此時短期利率為  $\alpha_4+2*\Delta R$ 。





(a)重設票面利率的時點



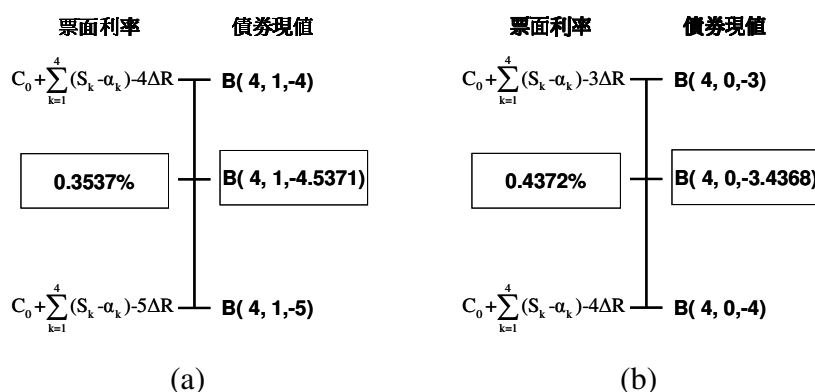
(b)實際支付債息的時點

圖(3.2.7) 計算 a 等於 0\* 的債券現值

### 2.a 等於 0\* 的情況：

考慮圖(3.2.7)(a)節點(3,1)中 a 等於 0\* 的情況，代表在 4Δt 時收到的債息為零，所以在 4Δt 時所重設的票面利率為  $\max(0+S_4-(\alpha_4+2\Delta R), 0)$  (對應到節點(4,2))、 $\max(0+S_4-(\alpha_4+\Delta R), 0)$  (對應到節點(4,1))、 $\max(0+S_4-(\alpha_4+0*\Delta R), 0)$  (對應到節點(4,0))，假設  $\max(0+S_4-(\alpha_4+2\Delta R), 0)=0$ ， $\max(0+S_4-(\alpha_4+\Delta R), 0)=0.003537$ ， $\max(0+S_4-(\alpha_4+0*\Delta R), 0)=0.004372$ ，即在 5Δt 會分別收 0%、0.3537%、0.4372% 的票面利率。將 0.3537% 轉換成  $C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) + A\Delta R$  的形式，以及 0.4372% 轉換成  $C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) + B\Delta R$  的形式，其中 A、B 為實數。假設 A 等於 -4.5371，

B 等於-3.4368，為了計算  $B(3,1,0^*)$ ，我們必須先求算  $B(4,1, -4.5371)$  以及  $B(4,0, -3.4368)$ ，因為  $-A$  介於-4 和-5 之間，可以利用線性內插法求算  $B(4,1, -4.5371)$ ，同理  $B$  介於-3 和-4，也可以利用  $B(4,0,-3)$  和  $B(4,0,-4)$  進行內插將  $B(4,0, -3.4368)$  求出。如圖(3.2.8)



圖(3.2.8) 利用線性內插法求算債券現值

利用線性內插法求算  $B(4,1,-4.5371)$ 、 $B(4,0,-3.4368)$

即

$$B(4,1,-4.5371) = \frac{B(4,1,-4) - B(4,1,-5)}{(C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 5\Delta R)} * (0.3537\% - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 5\Delta R)) + B(4,1,-5)$$

$$B(4,0,-3.4368) = \frac{B(4,0,-3) - B(4,0,-4)}{(C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 3\Delta R) - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R)} * (0.4372\% - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R)) + B(4,0,-4)$$

則

$$B(3,1,0^*) = \min(p_1 * B(4,2,0^*) * \frac{1}{1 + (\alpha_4 + 2 * \Delta R)} + p_2 * B(4,1,-4.5371) * \frac{1}{1 + (\alpha_4 + 1 * \Delta R)} + p_3 * B(4,0,-3.4368) * \frac{1}{1 + (\alpha_4 + 0 * \Delta R)}, F)$$

由上面兩個範例，以同樣的作法，可以求出各節點所有  $a$  值的債券現值，從到期日往前推算債券現值，即可算出期初債券理論價格。

## 第四章 實證分析與敏感度分析

本章以在市場上交易的雪球型利率連動債券作為範例，根據第三章的創新數值方法，進行實證分析與敏感度分析，首先利用市場上限買權(Caplets)報價校正 Hull-White 模型參數( $a$ 、 $\sigma$ )，建構符合市場期初期間結構的利率樹，並求出此債券的理論價格；最後說明雪球型債券價格與 Hull-White 模型參數以及零息利率曲線之間的關連性。

### 第一節 雪球型利率連動債券合約

#### (一) 合約簡介

**發行機構：**永豐銀行。

**發行期間：**共十年。

**發行價格：**票面金額新台幣壹仟萬元整。

**計、付息方式：**自發行日起每季重設並單利付息一次，且不得低於 0% 和延遲一期給付。

**票面利率：**

第一年：固定為 3% ( $C_i=3\%$ ， $i=0,1,2,3$ )

第二年：前一期票面利率+1.40%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+1.40\%-r_i)^+$ ， $i=4,5,6,7$ )；

第三年：前一期票面利率+1.65%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+1.65\%-r_i)^+$ ， $i=8,9,10,11$ )；

第四年：前一期票面利率+1.90%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+1.90\%-r_i)^+$ ， $i=12,13,14,15$ )；

第五年：前一期票面利率+2.15%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+2.15\%-r_i)^+$ ， $i=16,17,18,19$ )；

第六年：前一期票面利率+2.40%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+2.40\%-r_i)^+$ ， $i=20,21,22,23$ )；

第七年：前一期票面利率+2.65%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+2.65\%-r_i)^+$ ， $i=24,25,26,27$ )；

第八年：前一期票面利率+2.90%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+2.90\%-r_i)^+$ ， $i=28,29,30,31$ )；

第九年：前一期票面利率+3.15%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+3.15\%-r_i)^+$  ,  $i=32,33,34,35$ ) ；

第十年：前一期票面利率+3.40%-浮動利率 ( $C_i=(C_{i-1}+3.40\%-r_i)^+$  ,  $i=36,37,38,39$ ) ；

**浮動利率**：以計息定價日台北時間上午十一時依香港德勵財富資訊有限公司 6165 頁畫面九十天商業本票次級市場報價均價為依據。

**還本方式**：自發行日起到期一次還本，且發行機構得於此債券發行日後屆滿第三年及以後各期付息日時，依票面金額贖回此債券。

## (二) 商品投資風險

債券投資人將會面臨以下風險：

**市場利率風險**：此債券的債息與九十天商業本票次級市場利率連動，因為合約有反浮動的特性，利率一旦持續上升，債息將會越來越少，甚至為零，故投資人對於利率的走勢預測必須嚴謹注意。

**提前到期風險**：因為發行機構擁有提前贖回的權利，一旦利率持續下降，投資人將會面臨提前到期的風險。

**流動性風險**：對於發行機構，只能於特定時點行使贖回條款；對於投資人，不得中途要求解約，故當市場完全沒有流動性時，投資人必須持有至債券到期日。

**信用風險**：若在付債息前或到期前，發行機構發倒閉或違約事件，則投資人將面臨無法收取債息或本金的風險。

**再投資風險**：當發行機構以票面金額提前贖回此債券，投資人的再投資報酬可能沒有此債券如此高。

其中流動性風險、信用風險、再投資風險不在本文研究範圍內。

## 第二節 評價雪球型利率連動債券

### (一) 參數估計

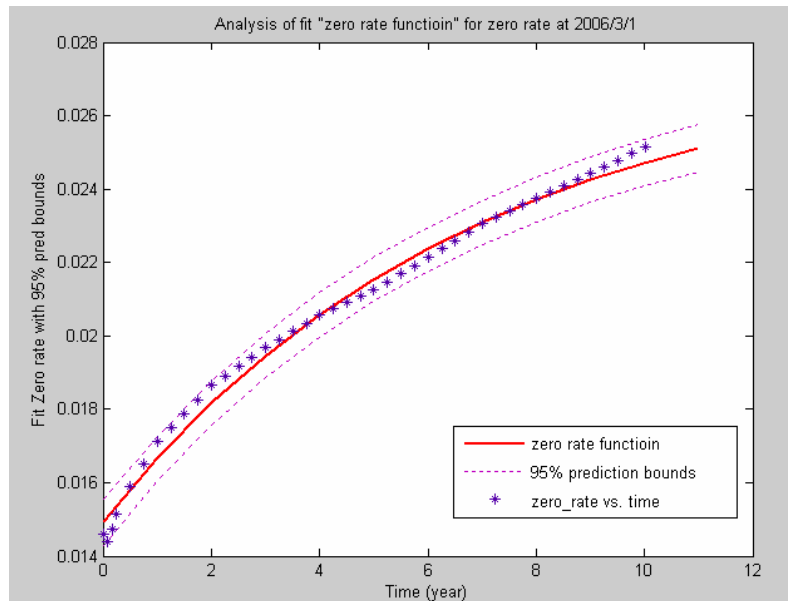
#### (1) 建構零息利率曲線

表(4.2.1)為中華票券所提供的零息利率，自 2006/3/1 至 2016/3/1。

表(4.2.1) 自 2006/3/1 起的零息利率

期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率
0.25	1.5160%	2.75	1.9420%	5.25	2.1466%	7.75	2.3572%
0.5	1.5900%	3	1.9678%	5.5	2.1691%	8	2.3744%
0.75	1.6505%	3.25	1.9898%	5.75	2.1918%	8.25	2.3917%
1	1.7115%	3.5	2.0118%	6	2.2145%	8.5	2.4090%
1.25	1.7497%	3.75	2.0339%	6.25	2.2372%	8.75	2.4264%
1.5	1.7880%	4	2.0561%	6.5	2.2601%	9	2.4439%
1.75	1.8264%	4.25	2.0730%	6.75	2.2830%	9.25	2.4614%
2	1.8649%	4.5	2.0900%	7	2.3059%	9.5	2.4790%
2.25	1.8905%	4.75	2.1070%	7.25	2.3230%	9.75	2.4966%
2.5	1.9162%	5	2.1241%	7.5	2.3401%	10	2.5143%

Hull 和 White(1994)中提出的零息利率方程式  $a \cdot e^{-bt} + c$ ，其中  $t$  表時間， $a$ 、 $b$ 、 $c$  為常數，我們利用表(4.2.1)的零息利率和 Matlab 內建函數，估計出最適的  $a$ 、 $b$ 、 $c$  常數，得  $a=-0.01269$ ， $b=0.1475$ ， $c=0.02761$ ， $SSE=3.418e-006$ ， $R\text{-square}=0.9916$ ，如圖(4.2.1)。



圖(4.2.1) 零息利率方程式

利用以求出的零息利率，即可利用遠期利率和零息利率的關係求出遠期利率

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1}$$

其中  $R(t, T_1)$  為時間  $t$  至時間  $T_1$  的零息利率， $F(t, T_1, T_2)$  為於時間  $t$  所觀察到時間  $T_1$  至時間  $T_2$  的遠期利率， $t < T_1 < T_2$ 。

表(4.2.2) 由表(4.2.1)轉換的遠期利率

$T_1$	$T_2$	$F(0, T_1, T_2)$	$T_1$	$T_2$	$F(0, T_1, T_2)$
0.25	0.5	1.664%	5	5.25	2.593028%
0.5	0.75	1.7727414%	5.25	5.5	2.6394008%
0.75	1	1.8979861%	5.5	5.75	2.6916158%
1	1.25	1.9012272%	5.75	6	2.7384681%
1.25	1.5	1.9781846%	6	6.25	2.7794002%
1.5	1.75	2.0579871%	6.25	6.5	2.8267396%
1.75	2	2.1354968%	6.5	6.75	2.8810782%

2	2.25	2.0941448%	6.75	7	2.9361422%
2.25	2.5	2.1461204%	7	7.25	2.7960393%
2.5	2.75	2.201187%	7.25	7.5	2.831876%
2.75	3	2.2568198%	7.5	7.75	2.8738064%
3	3.25	2.2516059%	7.75	8	2.9162979%
3.25	3.5	2.2964168%	8	8.25	2.9399244%
3.5	3.75	2.3448951%	8.25	8.5	2.9765555%
3.75	4	2.3939018%	8.5	8.75	3.0201965%
4	4.25	2.341579%	8.75	9	3.0644524%
4.25	4.5	2.3763335%	9	9.25	3.0870983%
4.5	4.75	2.4147087%	9.25	9.5	3.1246122%
4.75	5	2.453516%	9.5	9.75	3.1700923%

## (2) 校正 Hull-White 模型參數

利用市場上觀察到的上限買權報價，以四年期上限買權報價為例，如表(4.2.3)，代入式子(2.1.4)求得上限買權的現金價格，如表(4.2.4)。再根據期限加總即可得利率上限的現金價格，如表(4.2.5)。

表(4.2.3) 四年期上限買權之波動度報價

期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)
0.25	1.5%	8	0.25	2.5%	8	0.25	3.5%	8	0.25	4.5%	8
0.5	1.5%	8	0.5	2.5%	8	0.5	3.5%	8	0.5	4.5%	8
0.75	1.5%	8	0.75	2.5%	8	0.75	3.5%	8	0.75	4.5%	8
1	1.5%	8.538594	1	2.5%	8.360483	1	3.5%	8.321068	1	4.5%	8.314355
1.25	1.5%	9.065219	1.25	2.5%	8.712955	1.25	3.5%	8.635001	1.25	4.5%	8.621724
1.5	1.5%	9.603813	1.5	2.5%	9.073438	1.5	3.5%	8.956069	1.5	4.5%	8.936078
1.75	1.5%	10.14839	1.75	2.5%	9.437926	1.75	3.5%	9.280704	1.75	4.5%	9.253926
2	1.5%	11.1357	2	2.5%	10.14639	2	3.5%	9.837004	2	4.5%	9.778085
2.25	1.5%	12.12301	2.25	2.5%	10.85486	2.25	3.5%	10.3933	2.25	4.5%	10.30224
2.5	1.5%	13.08838	2.5	2.5%	11.54759	2.5	3.5%	10.93724	2.5	4.5%	10.81475
2.75	1.5%	14.07569	2.75	2.5%	12.25605	2.75	3.5%	11.49354	2.75	4.5%	11.33891
3	1.5%	14.81617	3	2.5%	12.97623	3	3.5%	12.06952	3	4.5%	11.85515
3.25	1.5%	15.55665	3.25	2.5%	13.69641	3.25	3.5%	12.6455	3.25	4.5%	12.37139
3.5	1.5%	16.29713	3.5	2.5%	14.41659	3.5	3.5%	13.22149	3.5	4.5%	12.88762
3.75	1.5%	17.02116	3.75	2.5%	15.12076	3.75	3.5%	13.78467	3.75	4.5%	13.39239



表(4.2.4) 四年期上限買權之現金價格

期 限 (年)	履約 價	現金 價格	期 限 (年)	履約 價	現金 價格	期 限 (年)	履約 價	現金 價格	期 限 (年)	履約 價	現金 價格
0.25	1.5%	0.000416	0.25	2.5%	0	0.25	3.5%	0	0.25	4.5%	0
0.5	1.5%	0.000683	0.5	2.5%	3.58E-14	0.5	3.5%	0	0.5	4.5%	0
0.75	1.5%	0.000989	0.75	2.5%	3.41E-09	0.75	3.5%	0	0.75	4.5%	0
1	1.5%	0.000993	1	2.5%	6.95E-08	1	3.5%	9.18E-18	1	4.5%	0
1.25	1.5%	0.001176	1.25	2.5%	1.53E-06	1.25	3.5%	1.97E-13	1.25	4.5%	0
1.5	1.5%	0.001364	1.5	2.5%	1.04E-05	1.5	3.5%	9.90E-11	1.5	4.5%	5.62E-17
1.75	1.5%	0.001545	1.75	2.5%	3.58E-05	1.75	3.5%	5.69E-09	1.75	4.5%	9.22E-14
2	1.5%	0.001441	2	2.5%	4.27E-05	2	3.5%	2.61E-08	2	4.5%	3.05E-12
2.25	1.5%	0.00156	2.25	2.5%	8.68E-05	2.25	3.5%	2.53E-07	2.25	4.5%	1.99E-10
2.5	1.5%	0.001687	2.5	2.5%	0.000149	2.5	3.5%	1.34E-06	2.5	4.5%	4.30E-09
2.75	1.5%	0.001814	2.75	2.5%	0.000228	2.75	3.5%	4.78E-06	2.75	4.5%	4.38E-08
3	1.5%	0.001802	3	2.5%	0.000265	3	3.5%	8.96E-06	3	4.5%	1.55E-07
3.25	1.5%	0.001904	3.25	2.5%	0.00035	3.25	3.5%	1.96E-05	3.25	4.5%	6.28E-07
3.5	1.5%	0.002014	3.5	2.5%	0.000446	3.5	3.5%	3.73E-05	3.5	4.5%	1.97E-06
3.75	1.5%	0.002124	3.75	2.5%	0.000549	3.75	3.5%	6.33E-05	3.75	4.5%	4.96E-06

表(4.2.5) 四年期利率上限之現金價格

期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格
1	1.5%	0.0020879	1	2.5%	3.41E-09	1	3.5%	0	1	4.5%	0
2	1.5%	0.00716633	2	2.5%	4.79E-05	2	3.5%	5.79E-09	2	4.5%	9.23E-14
3	1.5%	0.0136686	3	2.5%	0.000555042	3	3.5%	6.41E-06	3	4.5%	4.83E-08
4	1.5%	0.0215128	4	2.5%	0.00216609	4	3.5%	0.000135513	4	4.5%	7.76E-06

因為利率上限的價格可由式子(2.1.4)或式子(2.1.6)求出，故我們可以利用表(4.2.3)的利率上限現金價格來校正式子(2.1.6)中的利率回歸速度  $a$ 、利率波動度  $\sigma$ 。考慮能使兩者價格的平方差之和為最小的  $a$  和  $\sigma$ ，即

$$\min_{a, \sigma} SSE = \min_{a, \sigma} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n (U_{ki} - V_{ki})^2$$

其中  $U_{ki}$  為式子(2.1.4)算出的市場利率上限價格， $V_{ki}$  為式子(2.1.6)算出的利率上限價格，下標  $k$  等於 1 表履約價為 1.5% 的利率上限， $k$  等於 2 表履約價為 2.5% 的利率上限，以此類推。

當  $a$  等於 0.014485 和  $\sigma$  等於 0.004596，得到最小 SSE 為 7.80133E-005。故選擇(0.014485, 0.004596)作為 Hull-White 模型的參數( $a, \sigma$ )。

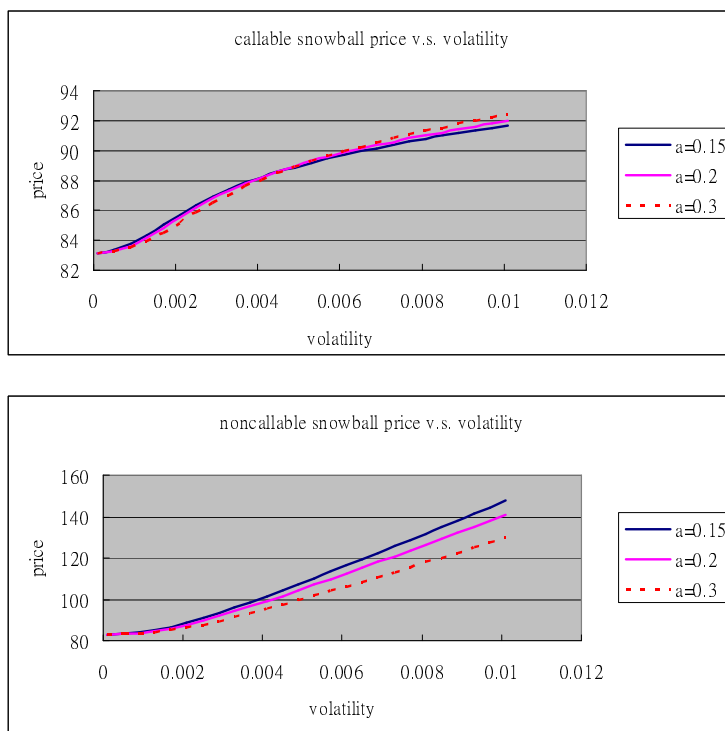
## (二) 實證結果

設面額為一百元整，利用第三章的數值方法以及利用利率上限所估計出來的參數，求得附有贖回條款的雪球型利率連動債券價格為 88.1891 元，不含贖回條款的價格為 116.566 元，所以可贖回條款的價值為 28.3769(116.566-88.1891)，發行機構的報酬率為 13.3927((100-88.1891)/88.1891)。

### 第三節 敏感度分析

以下設面額為一百元整，分析 Hull-White 利率模型的參數對債券價格的影響。

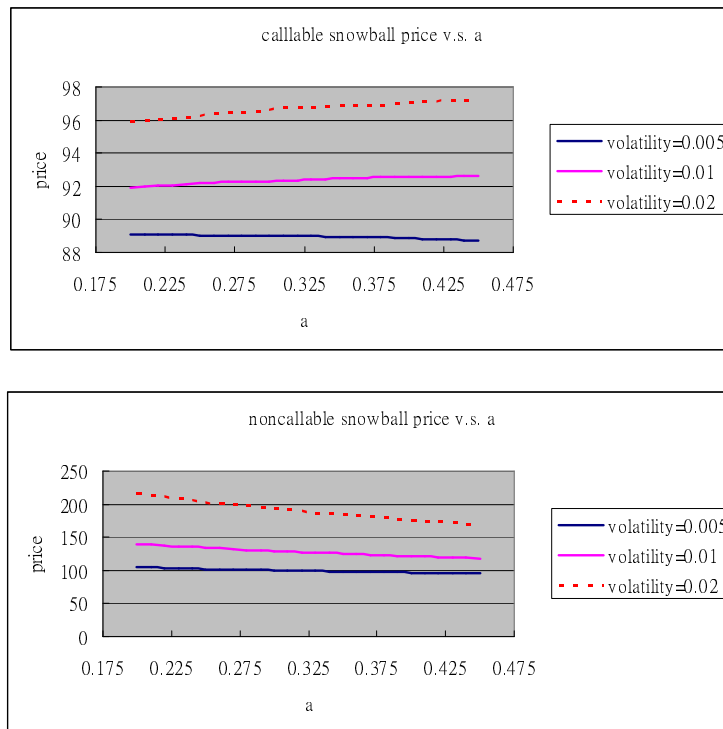
#### (一) 波動度 $\sigma$ 對雪球型債券價格的影響



圖(4.3.1) 波動度 $\sigma$ 對雪球型債券價格的影響

由圖(4.3.1)可知，當波動度 $\sigma$ 越高，債券價格會越高。當波動度越大，代表利率可能發生極高或極低的水準，當利率為極低時，債券持有者會獲得高債息，因此債券價值會升高；當利率為極高時，會造成低債息，但因為票面利率有下限0%，兩者效果相加還是會使得債券價值上升。對於有贖回條款雪球型債券，當利率為極低的情況下，發行機構有權贖回債券，會抑制債券價值快速上升，所以價格上升幅度不大。

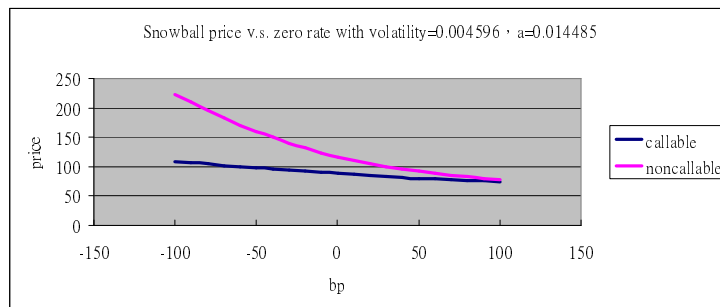
## (二) 利率回歸速度 $a$ 對雪球型債券價格的影響



圖(4.3.2) 利率回歸速度  $a$  對雪球型債券價格的影響

由圖(4.3.2)可知，對於不可贖回的雪球型債券，利率回歸速度  $a$  越小時，債券價值會越高。 $a$  越小，代表利率處高檔或低檔時，需要一段時間才會回歸到利率長期平均水準，故當利率為低檔時，債券持有者會得到高債息，且折現因子較小，因此債券價格上升，反之，當利率為高檔時，一樣因為票面利率有下限 0%，所以債券價格不會無限下降，故兩者效果相加，還是會造成價格與利率回歸速度  $a$  負相關。

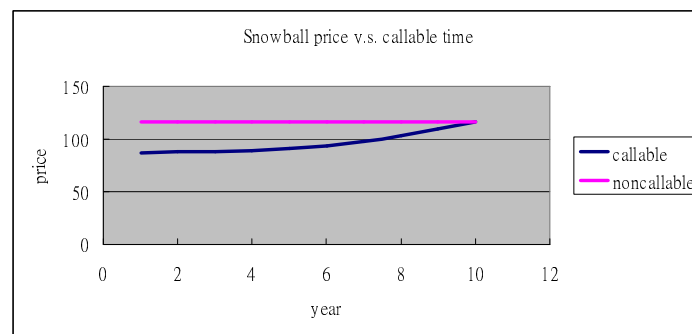
### (三) 零息利率對雪球型債券價格的影響



圖(4.3.3) 零息利率對雪球型債券價格的影響

圖(4.3.3)為零息利率平行上升下降各 100 個基點(bp)，債券價格的變化。很明顯地，當利率平行下降會讓債券價格上升，但可贖回型因為贖回條款，使得上升幅度不大；當利率平行上升時，會使得票面利率降低，此時發行機構不會行使贖回條款，故兩種價格會重合。

### (四) 贖回期間對雪球型債券價格的影響



圖(4.3.4) 贖回期間對雪球型債券價格的影響

由圖(4.3.6)可知，當可贖回的年限越後面，所得的債券價值越高，直到逼近不可贖回型債券的價格。

## 第五章 結論與建議

本文結合 Hull-White 模型和求面積法，以減少使用三元樹近似常態分配時所發生的分配誤差。Hull-White 模型為無套利模型之一，以當期市場利率期間結構作為模型的輸入值，因此讓利率模型符合真實世界；且 Hull-White 模型具有回歸平均值的特性，利率的變動會以回歸利率速度  $a$  回復到長期平均利率水準  $\frac{\theta(t)}{a}$ 。使用樹狀結構法，Hull-White 模型的短期利率可以表示為  $\alpha_1 + K\Delta R$ ， $K$  為整數，根據這個特性，我們針對市場上交易的雪球型利率連動債券提供一個創新的數值方法，處理雪球型債券高度路徑相依的債息問題。

在實證分析中，算出理論債券價格為 88.1891 元(面額為一百元)，發行機構的利潤為 11.8109，因為我們假設市場為完備的，忽略流動性風險，交易成本，保管成本...等等，也許因此造成跟市價有段差距，未來可將本文沒考慮的風險因子加入模型，讓模型更加完整。在敏感度分析中，得知利率波動度與債券價值為正向變動，而利率回歸速度以及零息利率曲線與債券價值為反向變動。當零息利率曲線大幅度下移時，對於不可贖回的雪球型債券價值會快速上升，但對於附有贖回條款的債券，價值上升的幅度並不會太大，故贖回條款使得發行機構有效地規避利率直速下降所造成的重大損失。

建議未來研究可以考慮非整數時點的債券評價為方向，以傳統樹狀結構法處理雪球型債券，只能計算出在整數時點的債券價值，但在真實世界裡，債券可以在任意時點交易，我們可以利用求面積法克服這點困難。以及使用不同的利率模型來評價雪球型債券或引用本文數值方法的概念評價其他利率衍生性商品。

## 參考文獻

- Andricopoulos, A.D., M. Widdicks, P.W. Duck, and D.P. Newton, 2003, “Universal option valuation using quadrature methods.” *Journal of Financial Economics*, 67, 447–471
- Black, F., 1976, “The Pricing of Commodity Contracts.” *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179
- Black, F., and P. Karasinski, 1991, “Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal.” *Financial Analysts Journal*, 52-59
- Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, 1997, “The Market Model of Interest Rate Dynamics.” *Mathematical Finance*, 7, no. 2, 127-155
- Health, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1990, “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, no. 4, 419-440
- Health, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1990, “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology.” *Econometrica*, 60, no. 1, 77-105
- Hull, J. and A. White, 1990, “Pricing Interest Rate Derivative Securities.” *Review of Financial Studies*, 3, no. 4, 573-592
- Hull, J. and A. White, 1993, “Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices.” *Advances in Futures and Options Research*, 6, 1-13
- Hull, J. and A. White, 1993, “The Pricing of Options on Interest Rate Caps and Floors Using the Hull-White Model.” *Journal of Financial Engineering*, 2, no. 3, 287-296
- Hull, J. and A. White, 1994, “Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model I : Single Factor Models.” *Journal of Derivatives*, 2, 7-16

- Hull, J. and A. White, 1996, "Using Hull-White Interest Rate Trees." *Journal of Derivatives*, 26-36
- Jamshidian, F., 1977, "LIBOR and Swap Market Models and Measures." *Finance and Stochastics*, 1, 293-330
- Kijima, M. and I. Nagayama, 1994, "Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model." *Journal of Financial Engineering*, 3, 275-292
- Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann, 1997, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rates." *Journal of Finance*, 52, no. 1, 409-430
- Vasicek, O. A., 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188