

使用 Hull-White 短利模型與求面積法評價雪球型債券

Pricing Snowball Notes with Hull-White Model and

Quadrature Method

戴天時¹, 王克陸², 戴 慈²

摘 要

本文討論以Hull-White短利模型評價雪球型利率連動商品，此商品為一複雜的反浮動債券，每期支付的票面利率具有路徑相關之特性，同時票面利率不可小於零，再加上可提早贖回債券之條款，因此定價複雜無封閉公式解，也不易建構數值模型評價。本文發現在Hull-White三元利率樹下，票面利率及債券價格計算問題可大幅化簡，結合求面積法(quadrature method)後進一步減少利率樹的分配誤差，建構出有效率並精確的評價方法。本文最後以市場資料與已經發行之雪球型債券實際進行演算，提供業者參考。

關鍵字：雪球型利率連動債券、Hull-White 模型、求面積法、分配誤差。

ABSTRACT

This paper investigates the pricing of the snowball note based on Hull-White term structure model and Quadrature method. Snowball notes can be considered as sophisticated inversing floating rate bonds with path-dependent coupons and redemption right. Because of these complications, there are no accurate closed form solutions for snowball notes. It is also difficult to develop an efficient numerical pricing method. This study shows that the calculation of coupons for snowball notes can be drastically simplified under Hull-White interest rate tree model. To further reduce the distribution error, we combine Hull-White model with Quadrature method, and then construct an efficient and accurate pricing method. Numerical simulations using market data are provided as examples of applications for practitioners in the industry.

Keywords: snowball notes, Hull-White model, Quadrature methods, distribution error

¹ 國立交通大學資訊與財金管理學系。

² 國立交通大學財務金融研究所。

壹、前言

由於金融市場的開放以及財務工程的發展，金融機構開發出許多新興利率商品(如結構債)，以滿足客戶投資和避險的需求。雪球型債券(snowball notes)由於具備反浮動(inverse floater)的特性，且每一期票面利率可視為前期的票面利率再加上反浮動的報酬，故雪球型債券的票面利率可在市場利率維持低檔時逐期累積變大，十分適合長期看空利率走勢投資人投資。此外，該債券的票面利率不得小於零，所以可幫助投資人規避市場利率維持高檔時所造成的損失。所以內含雪球型條款的利率商品在市場上交易十分活絡，例如 snowball range accrual。

雪球型債券的條款十分複雜，為一高度路徑相依的利率衍生性商品。該債券會在第一年支付高於市場存款利率的票面利息以吸引投資大眾，第二年起票面利率為前一期票面利率加上固定利差(Spread)再減去某浮動指標利率，所以當利率長期維持在低檔時，票面利率可以像雪球越滾越大，發行機構為了規避此風險，又規定可在特定時間將債券以票面價值提前贖回，這些複雜的條款使得雪球型債券的評價相當困難(見 Bender, Kolodko and Schoenmakers (2005))。不僅難以推導封閉公式解，欲使用蒙地卡羅法配合 Longstaff 和 Schwartz(2001) 的最小平方迴歸法來處理提前贖回問題，也會因需迴歸的變數太多而不易執行。

本文探討如何建構利率樹來評價雪球型債券，以利提前贖回條款的處理。由於雪球型債券每一期的票面利率，約略可表成一個常數減去前幾期的指標利率的和，和亞式選擇權(Asian option)的報酬相仿，都具備高度路徑相依特性，再加上可提前贖回條款與票面利率不得小於零的限制，當採用的利率期間結構比較複雜，例如 HJM(Heath-Jarrow-Merton)或是 Libor market model 這些非馬可夫過程(non-Markov process)的利率模型，則會造出節點無法合併(non-recombining)的利率樹，造成處理不同票面利率下的債券價格的運算量太大(請見 Dai and Lyuu (2007))而使得電腦無法處理。

本文發現在 Hull-White 利率樹下，票面利率及債券價格計算問題可大幅簡化。為了處理樹狀結構評價造成的分配性誤差(distribution error)，我們使用 Andricopoulos et al.(2003) 介紹的求面積法(quadrature method)以提高精確度，建構出有效率並精確地評價雪球型債券的方法。

貳、文獻回顧

因雪球型債券每一期的票面利率與亞式選擇權的報酬相仿，所以我們首先探討亞式選擇權之相關文獻；其次簡介利率模型，並著重於標準市場模型(standard market model)，因在實証分析中，需要用到市場上利率上限(Cap)的報價以及 Black's 模型來校正參數；最後詳細說明本文所使用的 Hull-White 三元樹利率模型與求面積法之相關文獻。

一、亞式選擇權

由於雪球型債券的票面利率，約略可表達成一個常數減去前幾期的指標利率的和，和亞式選擇權的報酬類似。Hull and White (1993)指出亞式選擇權可在二元樹的每個節點上加上適當狀態變數(states)就可以評價，Dai and Lyuu (2007)指出狀態變數的個數太多會導致電腦無法處理，Forsyth(2002)指出如果大量減少狀態變數而改用內插法來近似，則其誤差可能很大，造成評價的結果不會隨著期數增加而收斂。本文採用 Hull-White 的三元樹模型可使狀態變數大幅減少，並且只有在處理票面利率需大於零的條件(freeze at zero)時，才會用到內插法，因此大幅增評價的可靠性。

二、利率模型

標準市場模型是 Black(1991)將 Black-Scholes 模型延伸至利率領域，例如用以評價利率上限。利率上限(Cap)是由一組履約價格相同，但到期日不同的上限

買權(caplets)所組成，即一個發行期間為 T 的利率上限，其本金為 L ，上限水準 K_{cap} ，重設日期為 $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} = T$ ，設 r_k 為介於 t_k 到 t_{k+1} 之間、在時間 t_k 觀察到的利率水準 ($k=1, 2, \dots, n$)，可分解為 n 個上限買權，對應的報酬支付時間為 $t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}$ 。上限買權具有延遲給付的特性，對應於時間 t_k 觀察到的利率，會於時間 t_{k+1} 支付如下的報酬

$$L\delta_k \max(r_k - K_{cap}, 0) \quad (1)$$

其中 $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ 。若假設 r_k 服從指數常態分配，波動度 σ_k ，則上式可藉由 Black's 模型得到上限買權於時間零的價值為

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - K_{cap} N(d_2)] \quad (2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[F_k / K_{cap}] + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_k / K_{cap}] - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

F_k 為 t_k 到 t_{k+1} 的遠期利率， $P(0, t_{k+1})$ 為在時間 t_{k+1} 時支付 \$1 的零息債券於現在的價值， $N(\cdot)$ 為累積常態機率分配函數。

均衡模型(equilibrium model)加入利率走勢會回歸長期平均利率水準 (mean reversion) 的特性，Vasicek(1977) 提出的模型假設利率服從

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (3)$$

其中 a 為回復到利率長期水準的速度， b 為利率長期平均值， σ 為利率的波動度。Cox, Ingersoll, and Ross(1982)改善 Vasicek 模型會造成利率為負值的情形，提出 CIR model，其公式如下：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (4)$$

無套利模型(No-arbitrage model)進而改善均衡模型，使所建構出的利率結構能夠符合初期的殖利率曲線。Ho and Lee(1986) 提出其無套利模型為：

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (5)$$

其中 $\theta(t)$ 為時間的函數，用來調整模型符合初期的條件。之後 Hull and White(1990, 1993)將 Vasicek 的模型衍生至無套利模型，其模型以及 Hull and White(1994) 提出的短期利率三元樹會在下一節作詳細的介紹。

另外，Health, Jarrow and Morton(1990) 提出的 HJM 模型與 Brace, Gatarek and Musiela(1997) 提出的 BGM 模型(LIBOR market model)為遠期利率模型(forward rate model)，此兩模型因為具有非馬可夫(non-Markov)的性質，所以無法以利率樹的形式表示，只能以蒙地卡羅法來模擬利率的走勢。

因雪球型債券本身具有可贖回以及複雜的票面利率條款，為減少在不同票面利率下的債券價格狀態的運算量，以及使用樹狀結構較易處理提前贖回的特性，並兼顧模型能夠和市場殖利率曲線吻合的前提下，我們採用 Hull-White 三元樹利率模型。

三、Hull-White 短利模型與求面積法

Hull-White 模型假設瞬間短期利率 r 服從

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$$

其中 a, σ 為常數， σ 為短期利率的波動度， z 為一布朗運動， $\theta(t)$ 為使模型符合期間結構的時間函數。此模型可以評價零息債券歐式選擇權，考慮一個以本金 L ，在時間 S 到期的零息債券為標的物的歐式賣權，且賣權的到期日為時間 T ，其中時間 $0 < T < S$ 。

此賣權在時間零的價值為

$$LP(0,T)N(-h + \sigma_p) - LP(0,s)N(-h) \quad (6)$$

其中

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0,s)}{P(0,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

式中 K 為歐式賣權的執行價格， $P(0,T)$ 為在時間 T 時支付 \$1 的零息債券之現值， $N(\cdot)$ 為累積常態機率分配函數。

Hull-White(1994)提出穩定的兩階段法建立利率三元樹，將連續型隨機過程的 Hull-White 短利模型改用離散時間型(discrete time)的隨機過程表達，意即將原模型的瞬間短期利率 r 改成期間為 Δt 的零息利率 R ，其中 Δt 表利率樹每期時間間隔， R 的隨機過程可表示如下：

$$dR = (\theta(t) - aR)dt + \sigma dz$$

以下說明兩階段的造樹過程：

(一) 第一階段

第一階段為建立期初值為零， $\theta(t)$ 為零，且對稱於 $R^* = 0$ ，服從如下 R^* 隨機過程的三元樹：

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

$R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2\Delta t$ 的常態分配，亦即

$$E(\Delta R^*) = E(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)) = -aR^*(t)\Delta t$$

$$\text{Var}(\Delta R^*) = \text{Var}(R^*(t+\Delta t) - R^*(t)) = \sigma^2\Delta t$$

定義 $\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ 為利率樹上的利率間距，且任一節點 (i,j) 代表時間為 $i\Delta t$ ，利率 R^* 為 $j\Delta R^*$ 的節點，利率在下一期往上走的機率為 P_u ，持平的機率為 P_m ，往下走的機率為 P_d 。在第一階段下，當期的利率變化到下一期，會有三種走勢，當變數 j 夠大時必須用圖 1(c) 走勢，相對地，當 j 夠小時則採圖 1(b) 的走勢，其餘狀況利率走勢採用圖 1(a)，這是因為利率具有回歸平均值的特性，節點的走勢會隨著當時利率高低而改變，並且利用一階與二階常態分配的動差函數與機率總和等於一這三個方程式，求得 P_u 、 P_m 、 P_d 機率值。

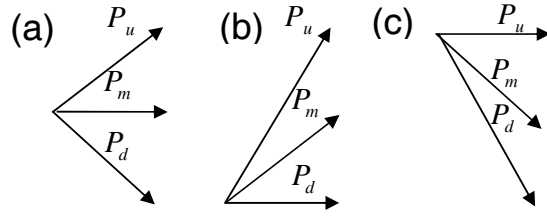


圖 1：Hull-White 三元樹的三種利率走勢

(二) 第二階段

第一階段建構的利率樹和當時市場所觀察到的利率期間結構未必相同，所以第二階段要將 R^* 上的節點調整到能符合期初之利率期間結構，把 R^* 三元樹轉為 R 三元樹，定義 α_i 為 $\alpha(i\Delta t)$ ，是 R 在 R 三元樹中 $i\Delta t$ 時的利率減去對應的 R^* 三元樹中 R^* 在 $i\Delta t$ 時的利率，其中 α_0 為現在到 Δt 時間的即期利率 (spot rate)。 $Q_{i,j}$ 為一個在利率走到節點 (i,j) 時支付 \$1，否則報酬為零的商品之現值。 α_i 與 $Q_{i,j}$ 可以在期初期間結構完全吻合的條件下以前推法 (forward induction) 求出，得到下列公式：

$$\alpha_i = \frac{\ln \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}} Q_{m,j} e^{-j\Delta R \Delta t} - \ln P_{i+1}}{\Delta t} \quad (7)$$

其中 P_{i+1} 為在 $(i+1)\Delta t$ 到期的零息債券價格， n_i 為三元樹在 $i\Delta t$ 時，變數 j 的最大值。一旦 α_i 決定了， $Q_{i+1,j}$ 由下列公式算出：

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k} q(k,j) \exp[-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t] \quad (8)$$

其中 $q(k,j)$ 為節點 (i,k) 走到節點 $(i+1,j)$ 的機率。算出每一期的 α_i 後，搭配由市場利率上限報價校正出的 a 、 σ 常數參數，便可得到與市場條件一致的利率樹。

由於二元樹或三元樹等數值方法，皆是以離散型分配去近似連續型分配，因而會產生分配誤差 (Figlewski and Gao (1999))，當樹的期數切得不夠多時 (Δt 不夠小時)，會因為分配誤差太大而導致評價結果不準確。假設雪球型債券的票面利率與 90 天期的商業本票利率相關，如果用 Hull-White 三元利率樹模擬的隨機過程 R 代表 90 天期的利率，則會因 Δt 太大而出現分配誤差過大的問題。因此，我

們採用 Andricopoulos et al.(2003)的求面積法(quadrature method)以解決分配誤差的問題。求面積法可以視為一個多元樹，它提高樹的每個節點的分支的個數，讓樹所模擬的離散型分配更貼近連續型分配，並使用辛普森法(Simpson method)提高收斂的速度，故可解決上述分配誤差的問題。

參、評價方法

本節分為三部分：第一部分說明雪球型利率連動債券付息之特性；第二部分以 Hull-White 利率三元樹為基礎，建立一創新的數值方法評價雪球型利率連動債券；第三部分利用求面積法(quadrature method)建構 Hull-White 多元樹，解決分配誤差，更精確的評價雪球型利率連動債券。

一、雪球型利率連動債券

一般雪球型利率連動債券付息公式如下：

$$C_i = (C_{i-1} + S_i - r_i)^+, \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (9)$$

如圖 2，第 i 期所設定的票面利率 C_i 為第 $i-1$ 期所設定的票面利率 C_{i-1} 加上第 i 期利差(spread) S_i 再減去第 i 期的浮動利率 r_i ，且票面利率不得為負。

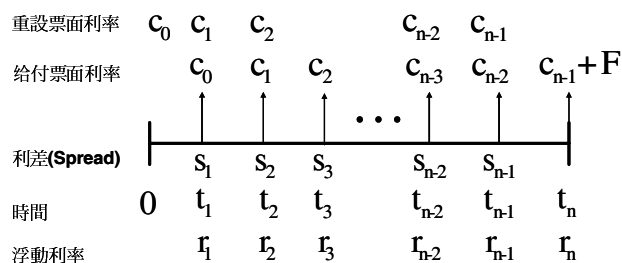


圖 2：雪球型利率連動債券

C_0 為合約中載明的固定票面利率，且因為延遲給付條款， C_1 的支付時點為 t_{1+1} ，到期日 t_n 時另支付票面本金 F 。

二、以 Hull-White 三元樹評價雪球型利率連動債券

在 Hull-White 三元樹結構下，圖 3 顯示其第一階段，利率樹的間距為 ΔR ，節點 $\text{node}(i,j)$ 的短期利率可分解為 $\alpha_i + j\Delta R$ ， α_i 為第 i 期的節點往上平移的值(見式 7)，故式(9)可改寫為

$$C_i = (C_{i-1} + S_i - (\alpha_i + K\Delta R))^+, i=1,2,\dots,n-1, K \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

其中 $K=-n_i, -n_i+1, \dots, 0, \dots, n_i-1, n_i$ ， $i\Delta t$ 時最高點的短期利率為 $\alpha_i + n_i\Delta R$ ， $n_i \in \mathbb{Z}$ 。

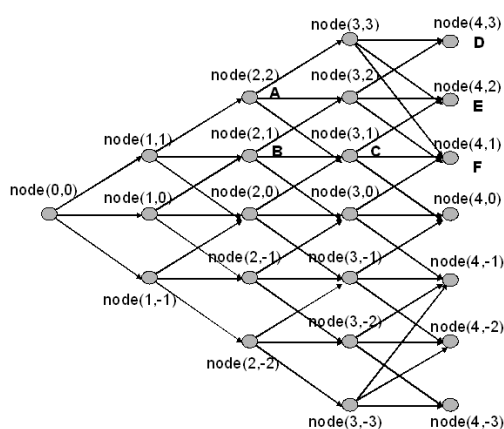


圖 3：Hull-White 三元樹(第一階段)

因為雪球型債券的計息方式高度路徑相依，如果選擇到達節點 (i,j) 的路徑數作為計算票面利率的狀態變數(state variable)，運算將會太複雜，不易處理，故我們利用短期利率在 Hull-White 利率模型下能以 $\alpha_i + j\Delta R$ 型態表示的特性，用三步驟來處理雪球型債券的票面利率與計算期初價格，並在每個步驟中詳細說明：第一步驟是為求簡化計算，允許票面利率為負的情況，計算節點 $\text{node}(i,j)$ 所有可能出現的票面利率；第二步驟加入票面利率不得小於零的條款；第三步驟則是考慮在可贖回條款下，利用後推法(Backward induction)求算債券現值。

(一)第一步驟 計算節點 $\text{node}(i,j)$ 最大與最小可能的票面利率

第一步驟中，我們先忽略票面利率可能為負的狀況，故式(9)可改寫為

$$\begin{aligned}
 C_i &= (C_{i-1} + S_i - r_i) \\
 &= C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) - \sum_{k=1}^i f_k \Delta R
 \end{aligned} \tag{11}$$

其中 f_k 為整數，由到達節點 $\text{node}(i,j)$ 的路徑決定，並定義 $C_{i,j}$ 為節點 $\text{node}(i,j)$

所有可能票面利率的集合。

(1) 由路徑計算票面利率

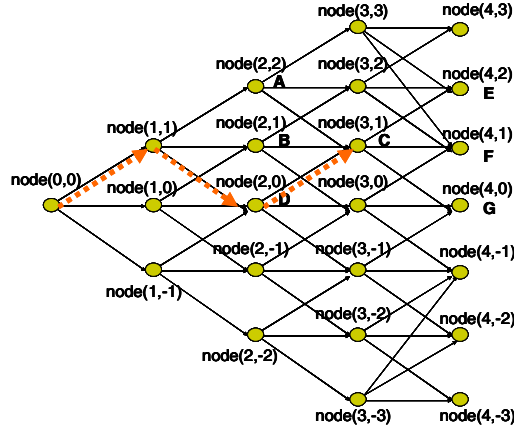


圖 4：由路徑計算票面利率

如圖 4，給定一條利率路徑 $\{ \text{node}(0,0) \rightarrow \text{node}(1,1) \rightarrow \text{node}(2,0) \rightarrow \text{node}(3,1) \}$ ，若忽略票面利率為負的狀況，則此路徑在 $\text{node}(3,1)$ 所訂立的票面利率，亦即 $C_{3,1}$ 的其中一種票面利率等於

$$\begin{aligned}
 C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - \sum_{k=1}^3 f_k \Delta R &= C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - (1+0+1)\Delta R \\
 &= C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 2\Delta R
 \end{aligned}$$

定義節點 $\text{node}(i,j)$ 的父節點為在 $(i-1)\Delta t$ 時有連結到節點 $\text{node}(i,j)$ 的節點，節點 $\text{node}(i,j)$ 的子節點為在 $(i+1)\Delta t$ 時有連結到節點 $\text{node}(i,j)$ 的節點。如圖 4，節點 C 的父節點為節點 A、B、D，節點 C 的子節點為節點 E、F、G。定義節點 $\text{node}(i,j)$ 的 (M,m) 代表此節點的最大可能票面利率為 $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + M\Delta R$ ，最小可能票面利率

$C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + m\Delta R$ ，即 $-\sum_{k=1}^i f_k$ 的最大值為 M ，最小值為 m 。

因為雪球型債券具有反浮動的特性，短期利率走低會使得票面利率上升，故節點 (i,j) 的最大票面利率會由其父節點的最低點中之最大票面利率提供，相對地，節點 (i,j) 的最小票面利率會由其父節點的最高點中之最小票面利率提供。如圖 5，每個節點的 $-\sum_{k=1}^i f_k$ 上限為 $\sum_{k=1}^i k$ ，下限為 $-\sum_{k=1}^i k$ ，因此 $C_{i,j}$ 最多只有 $2\sum_{k=1}^i k$ 的狀況，第 i 期總共有 $2i+1$ 個節點，因此我們演算法速度可從由路徑算各節點的狀況 $O(3^i)$ 降低至 $O(n^3)$ 。

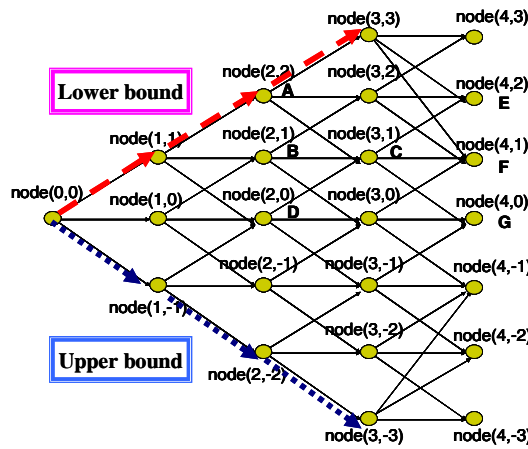


圖 5：票面利率的上下界

(2) 計算各節點之最大與最小票面利率

如圖 6，節點 C 的最大票面利率會由父節點中的最低點節點 D 提供，由節點 D 中的 M 值再減去節點 C 的 ΔR 高度(為 1)，故節點 C 的 M 值等於 $1-1=0$ ，最小票面利率會由父節點的最高點節點 A 提供，由節點 A 中的 m 值再減去節點 C 的 ΔR 高度，故節點 C 的 m 值等於 $-3-1=-4$ ，所以節點 C 的 (M,m) 為 $(0,-4)$ ，即節點 $\text{node}(3,1)$ 的所有可能票面利率 $C_{3,1} = \{ C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) + 0 * \Delta R, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 1 * \Delta R$

$, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 2 * \Delta R, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 3 * \Delta R, C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 4 * \Delta R \}$ ，以此類推，可以得到各節

點的(M,m)。

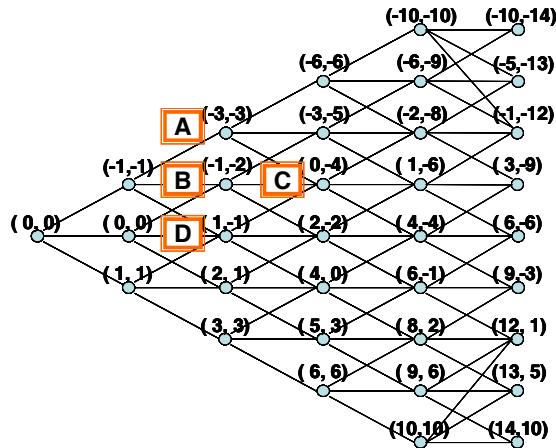


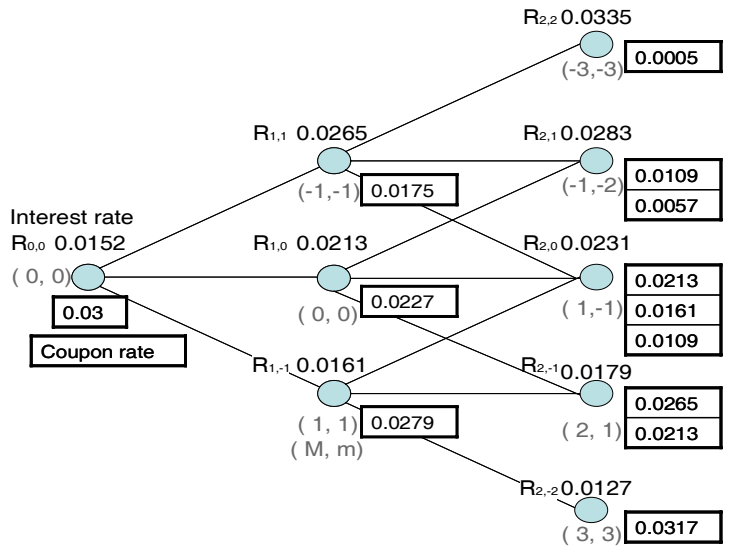
圖 6：計算各節點的(M,m)

下圖中將以實際的數值範例來說明圖 6 的利率樹如何建構，假設已知

Hull-White 利率樹中， $\Delta R=0.052$ ， $\alpha_0=0.0152$ ， $\alpha_1=0.0213$ ， $\alpha_2=0.0231$ ， $S_1=0.014$ ， $S_2=0.0165$ ， $C_0=0.03$ 。利率情況為 $R_{1,1}$ 的 M 與 m 皆從 $R_{0,0}$ 的 M 與 m 減去 $R_{1,1}$ 的 ΔR 倍數，即為 $0-1=-1$ ，依此類推 $R_{1,0}$ 的 $(M,m)=(0,0)$ ， $R_{1,-1}$ 的 $(M,m)=(1,1)$ ；而 $R_{2,1}$ 的 M 為 $R_{1,0}$ 的 M 減去 $R_{2,1}$ 的 ΔR 倍數，即為 $0-1=-1$ ， $R_{2,1}$ 的 m 為 $R_{1,1}$ 的 m 減去 $R_{2,1}$ 的 ΔR 倍數，即為 $-1-1=-2$ ；另一種情況為 $R_{2,2}$ 的 M 為 $R_{1,-1}$ 的 M 減去 $R_{2,2}$ 的 ΔR 倍數，即為 $1-0=1$ ， $R_{2,2}$ 的 m 為 $R_{1,1}$ 的 m 減去 $R_{2,1}$ 的 ΔR 倍數，即為 $-1-0=-1$ ，依此類推可知 $R_{2,2}$ 的 $(M,m)=(-3,-3)$ ， $R_{2,-1}$ 的 $(M,m)=(2,1)$ ， $R_{2,-2}$ 的 $(M,m)=(3,3)$ 。

根據 (M,m) 的情況可知利率樹節點所有可能的票面利率，例如 $R_{1,1}$ 的票面利率只有一種，為 $C_0+(S_1-\alpha_1)+(-1)*\Delta R=0.0175$ ； $R_{2,1}$ 的票面利率有兩種，為 $C_0+(S_1-\alpha_1)+(S_2-\alpha_2)+(-1)*\Delta R=0.0109$ 與 $C_0+(S_1-\alpha_1)+(S_2-\alpha_2)+(-2)*\Delta R=0.0057$ ；而 $R_{2,2}$ 的票面利率有三種，為 $C_0+(S_1-\alpha_1)+(S_2-\alpha_2)+1*\Delta R=0.0213$ ， $C_0+(S_1-\alpha_1)+(S_2-\alpha_2)+0*\Delta R=0.0161$ 與 $C_0+(S_1-\alpha_1)+(S_2-\alpha_2)+(-1)*\Delta R=0.0109$ ，以此類推便可求得每個節點所有的票面利率（如下圖）。

- 格式化: 字型: 非粗體
- 格式化: 字型: 非粗體
- 格式化: 內文, 靠左, 行距: 1.5 倍行高, 不與下段同頁
- 刪除: 將
- 刪除: 予以實例化
- 格式化: 下標



(二) 第二步驟 加入票面利率不得小於零的條款

在第一步驟中，我們先忽略票面利率不得小於零的條款，而先求算各節點 (i,j) 的 (M,m) ，所以在各節點有至多 $M-m+1$ 種可能的票面利率，第二步驟便是計算當在 $i\Delta t$ 時，存在一個整數 K_i 使得 $-\sum_{k=1}^i f_k$ 低於 K_i 的情況便會被消除，因為其所對應的票面利率會低於零。 K_i 為滿足 $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + K_i \Delta R \geq 0$ 的最小整數，亦即

$$K_i = \left\lceil \frac{C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k)}{\Delta R} \right\rceil \quad (12)$$

根據第一步驟以及式(12)求算在 $i\Delta t$ 時，所有節點的 (M,m) 以及對應的 K_i 後，會有三種調整情況，如下說明。

情況一：

M,m 皆大於或等於 K_i ，表示此節點的所有可能票面利率皆大於 0%，則此節點的 (M,m) 維持不變，共有 $M-m+1$ 種可能票面利率。

情況二：

(M,m) 中有部份小於 K_i ，表示此節點的可能票面利率有小於 0% 的部分，必須刪除，所以將 m 用 K_i 替代，並加入 0^* 這個符號，代表此節點有出現票面利率

為 0% 的情況，則此節點的 (M,m) 由 (M,K_i,0^{*}) 替代，共有 M-K_i+2 種可能票面利率。

情況三：

(M,m) 皆小於 K_i，代表此節點的可能票面利率皆小於 0%，則此節點 (M,m) 由 (0^{*},0^{*}) 替代，票面利率只有 0% 一種。

當節點 (i,j) 的父節點含有 (0^{*},0^{*})，節點 (i,j) 的重設票面利率成為 0+S_i-(α_i+jΔR) (因為前一票面利率為 0%)，為了統一 (M,m) 的格式，以及方便計算往後各節點的 (M,m)，必須將 0+S_i-(α_i+jΔR) 轉換成 $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + \delta_{i,j} \Delta R$ 的形式，其中 δ_{i,j} 為整數，取

$$\delta_{i,j} = \left\lfloor \frac{C_0 + \sum_{k=1}^{i-1} (S_k - \alpha_k) + j\Delta R}{\Delta R} \right\rfloor \quad (13)$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表下高斯函數，δ_{i,j} 作為計算債券現值使用線性內插法的下限，在第三步驟中說明。

(1) 在票面利率不得小於零的條款下計算各節點最大與最小的票面利率

如圖 7，假設 C₀, S₁, S₂, S₃, α₁, α₂, α₃, ΔR 已知，由式(12)算出 $K_1 = \left\lfloor -\frac{C_0 + S_1 - \alpha_1}{\Delta R} \right\rfloor = -2$ ， $K_2 = \left\lfloor -\frac{C_0 + S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2}{\Delta R} \right\rfloor = -2$ ， $K_3 = \left\lfloor -\frac{C_0 + S_1 + S_2 + S_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\Delta R} \right\rfloor = -4$ 。在 1 Δt 時，所有節點的 (M,m) 皆大於等於 K₁，所以在 1 Δt 時的 (M,m) 都不必改變範圍。在 2 Δt 時，先根據第一步驟，求算各節點未考慮票面利率低於零的 (M,m)，如圖 7(a) 所示，但因為 K₂ = -2，節點 (2,2) 的 (M,m) 皆小於 K₂，因此由 (-3,-3) 調整成 (0^{*},0^{*})，其他節點則不變；如圖 7(b) 所示。在 3 Δt 時，節點 (3,3) 的 M, m 值都是由節點 (2,2) 提供，在節點 (2,2) 的票面利率為 0%，故節點 (3,3) 的票面利率為 0+S₃-(α₃+3ΔR)，根據式 (13)，可得 $\delta_{3,3} = \left\lfloor -\frac{C_0 + (S_1 + S_2 - \alpha_1 - \alpha_2) + 3\Delta R}{\Delta R} \right\rfloor = -7$ ，即節點 (3,3) 的 (M,m) 等於 (-7,-7)。而節點 (3,2) 的 m 值由節點 (2,2) 提供，故節點 (3,2) 的最小可能票面利率為

$0+S_3-(\alpha_3+2\Delta R)$ ，且 $\delta_{3,2} = \left\lfloor -\frac{C_0+(S_1+S_2-\alpha_1-\alpha_2)+2\Delta R}{\Delta R} \right\rfloor = -6$ ，則節點(3,2)的 m 值等於-2。同

理，節點(3,1)的 m 值等於-5 ($\delta_{3,1} = \left\lfloor -\frac{C_0+(S_1+S_2-\alpha_1-\alpha_2)+1\Delta R}{\Delta R} \right\rfloor = -5$)。再根據第一步驟求

算其他節點的(M,m)，如圖 7(c)所示。之後再考慮 $3\Delta t$ 時(M,m)的下限 $K_3 = -4$ ，得

到圖 7(d)的結果。

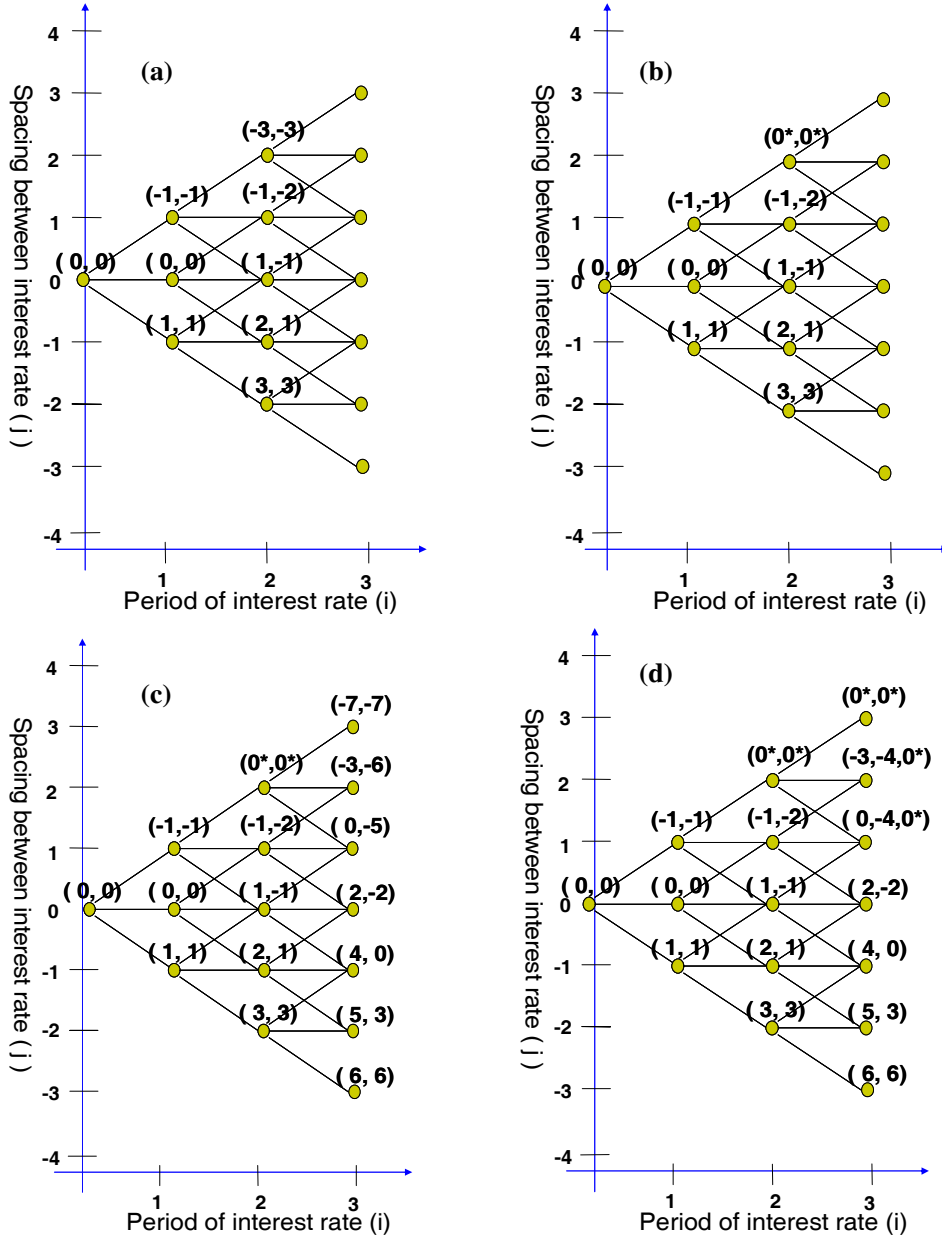


圖 7：計算各節點的(M,m)及考慮下限 K_i

在時間 $i\Delta t$ 時，我們可藉由第一步驟，求出尚未考慮票面低於零的 (M,m) ，再利用第二步驟，以 K_i 將票面利率低於零的部份消除，利用遞迴此兩步驟，則可得到整個利率樹所有節點的 (M,m) 。

(三) 第三步驟 計算債券現值以及考慮贖回條款

首先定義 $B(i,j,a)$ 代表節點 (i,j) 在 $(i+1)\Delta t$ 時得到票面利率為 $C_0 + \sum_{k=1}^i (S_k - \alpha_k) + a\Delta R$ 的情況下 ($m \leq a \leq M$)，於 $(i+1)\Delta t$ 時的債券現值。雪球型債券的票面利率有延遲給付的特性，所以節點 (i,j) 在 $i\Delta t$ 所重設的票面利率會在 $(i+1)\Delta t$ 的時點支付，如圖 8 中，節點 $(3,1)$ 於時點 $4\Delta t$ 共有 $B(3,1,0)$ 、 $B(3,1,-1)$ 、...、 $B(3,1,-4)$ 、 $B(3,1,0^*)$ 共六種可能的債券現值。以下分 a 不等於 0^* 和 a 等於 0^* 兩種情況，說明如何使用後推法 (Backward induction) 求算 $B(i,j,a)$ 。

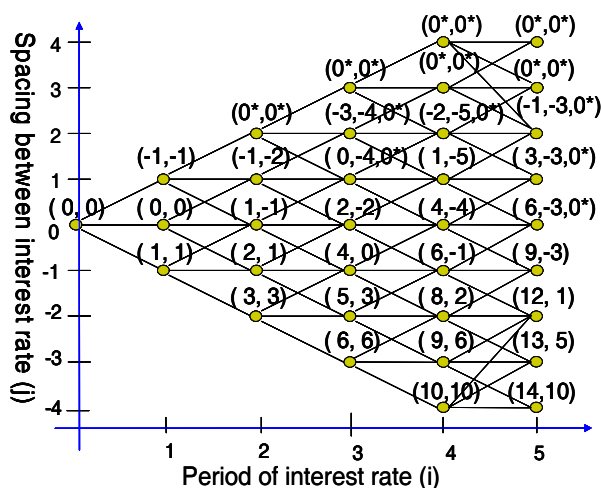


圖 8：計算各節點的債券現值

(1) a 不等於 0^* 的情況：

考慮圖 8 節點 $(3,1)$ 中 a 等於 -4 的情況，如圖 9 所示，會對應到其子節點 $(4,2)$ 中 a 等於 -6 (因為 $-4-2$)、節點 $(4,1)$ 中 a 等於 -5 (因為 $-4-1$)、節點 $(4,0)$

中 a 等於-4(因為-4-0)，機率分別為 p_1, p_2, p_3 ，但因為 $K_4 = -5$ ，表示 a 的狀態若小於-5時，所得到的票面利率會低於零，因此節點(4,2)中 a 等於-6的狀態必須改成 a 等於 0^* ，表示該點不會獲得票面利率；而節點(4,1)中 a 等於-5的狀態會大於等於 K_4 ，因此該點所得票面利率不會低於零。

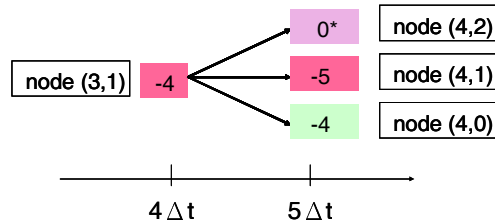


圖 9：計算 a 不等於 0^* 的債券現值，時間軸為票面利率支付的時點

若 $5\Delta t$ 不為債券到期日， F 為債券面額，節點 $\text{node}(3,1)$ 中 a 等於-4 的情況於 $4\Delta t$ 的債券現值 $B(3,1,-4)$ 為

$$B(3,1,-4) = \min(p_1 * B(4,2,0^*) * \frac{1}{1+(\alpha_4+2*\Delta R)} + p_2 * B(4,1,-5) * \frac{1}{1+(\alpha_4+1*\Delta R)} + p_3 * B(4,0,-4) * \frac{1}{1+(\alpha_4+0*\Delta R)}, F) + (C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) * F$$

如果 $5\Delta t$ 為債券到期日，則 $B(3,1,-4)$ 為

$$B(3,1,-4) = \min(p_1 * (B(4,2,0^*) + F) * \frac{1}{1+(\alpha_4+2*\Delta R)} + p_2 * (B(4,1,-5) + F) * \frac{1}{1+(\alpha_4+1*\Delta R)} + p_3 * (B(4,0,-4) + F) * \frac{1}{1+(\alpha_4+0*\Delta R)}, F) + (C_0 + \sum_{k=1}^3 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) * F$$

此時

$$B(4,2,0^*) = 0 * F, B(4,1,-5) = (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 5\Delta R) * F, B(4,0,-4) = (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) * F$$

其中使用 \min 函數，是由於發行機構擁有以債券面額 F 贖回此債券的權利，故當算出的價值比面額 F 高時，發行機構將會執行贖回條款，債券現值至多為面額 F ，而不管是否有執行贖回條款，債券持有人都會在 $4\Delta t$ 時收到 $(C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) * F$ 的票面利息，所以式子最後必須加

上此票面利息。

(2) a 等於 0* 的情況：

考慮圖 8 節點(3,2)中 a 等於 0* 的情況，代表在 4Δt 時收到的票面利率為零，
假設在 4Δt 時所重設的票面利率為 $\max(0+S_4-(\alpha_4+3\Delta R), 0)=0$ (對應到節點(4,3))

、 $\max(0+S_4-(\alpha_4+2\Delta R), 0)=0$ (對應到節點(4,2))、 $\max(0+S_4-(\alpha_4+1*\Delta R), 0)=0.003537$ (對應到節點
(4,1))，即在 5Δt 會分別收 0%、0%、0.3537% 的票面利率，如圖 9。將 0.3537%
轉換成 $C_0+\sum_{k=1}^4(S_k-\alpha_k)+K\Delta R$ 的形式，假設 K 等於 -4.5371，則我們可以利用線性內插法

求算 B(4,1, -4.5371) 如圖 10。

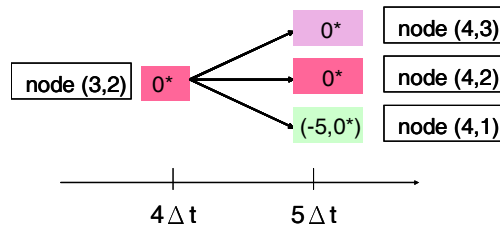


圖 9：計算 a 等於 0* 的債券現值，時間軸為票面利率支付的時點

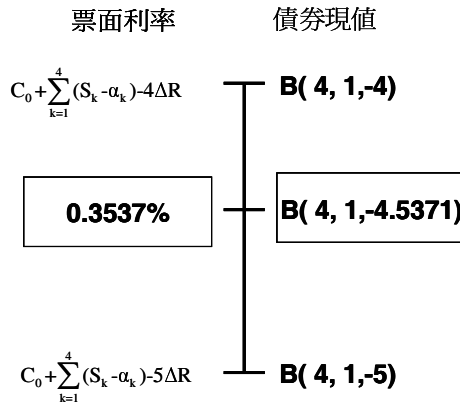


圖 10：利用線性內插法求算債券現值

即

$$B(4,1,-4.5371) = \frac{B(4,1,-4) - B(4,1,-5)}{(C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 4\Delta R) - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 5\Delta R)} * (0.3537\% - (C_0 + \sum_{k=1}^4 (S_k - \alpha_k) - 5\Delta R)) + B(4,1,-5)$$

則

$$B(3,2,0^*) = \min(p_1 * B(4,3,0^*) * \frac{1}{1+(a_1+3*\Delta R)} + p_2 * B(4,2,0^*) * \frac{1}{1+(a_1+2*\Delta R)} + p_3 * B(4,1,-4.5371) * \frac{1}{1+(a_1+1*\Delta R)}, F)$$

使用上述 (1) 與 (2) 同樣的作法，可以求出各節點所有 a 值的債券現值，從到期日往前推算債券現值，即可算出期初債券理論價格。

三、應用求面積法建構 Hull-White 多元樹

在 Hull-White 建構三元樹的第一階段中， $R^*(t+\Delta t)-R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2\Delta t$ 的常態分配，是以三元樹近似此常態分配，也就是經過一單位時間 Δt ， ΔR^* 只有三種可能值，但利率經過 Δt 後的可能走勢不該只有三種，當 Δt 太大時，分配誤差將會顯著地影響評價的準確度。評價雪球型利率連動債券分為兩階段：第一階段是考慮在 Hull-White 第一階段中加入求面積法的概念，讓三元樹能擴展至多元樹；第二階段為將多元樹調整成 Hull-White 第二階段的利率樹，再套用前述的演算數值方法求雪球型債券價值。

(一) 第一階段

一樣建構對稱於 $R^*=0$ ，服從 $dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$ 隨機過程的平行利率樹，定義 R^*_{ij} 為節點 (i,j) 的短期利率， $R^*_{ij,max}$ 為節點 (i,j) 至 (i+1) Δt 最大的可能利率， $R^*_{ij,min}$ 為節點 (i,j) 至 (i+1) Δt 最小的可能利率，亦即

$$R^*_{ij,max} = R^*_{ij} + q^* = R^*_{ij} + 5\sigma\sqrt{\Delta t} \quad , \quad R^*_{ij,min} = R^*_{ij} - q^* = R^*_{ij} - 5\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$\Delta R = \sqrt{\Delta t}/k$ 為利率的間隔，k 為正整數，為了要將三元樹延伸至多元樹，我們必須限制 $q^* > \Delta R \Rightarrow k > 1/5\sigma$ ，如圖 11 所示

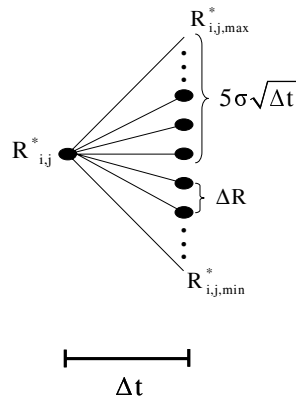


圖 11：計算多元樹的最大最小可能利率

但 $q^* = 5\sigma\sqrt{\Delta t}$ 不一定會被 ΔR 整除，所以定義 n_{ij}^+ 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最大可能利率距離 R_{ij}^* 的步數，同理， n_{ij}^- 為節點 (i,j) 至 $(i+1)\Delta t$ 最小可能利率距離 R_{ij}^* 的步數，這樣才保證節點會重合在一起(Recombine)，如圖 12。 n_{ij}^+ ， n_{ij}^- 公式如下

$$n_{ij}^+ = \left\lceil \frac{R_{ij,max}^* - R_{ij}^*}{\Delta R} \right\rceil, \quad n_{ij}^- = \left\lceil \frac{R_{ij,min}^* - R_{ij}^*}{\Delta R} \right\rceil$$

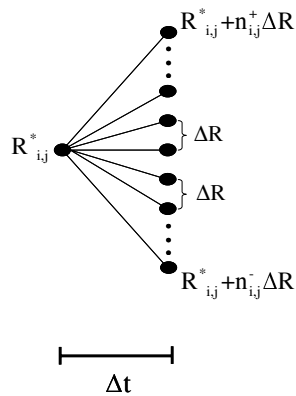


圖 12：調整多元樹的最大最小可能利率

如此我們可以建造出第一階段的多元平行樹，如圖 13

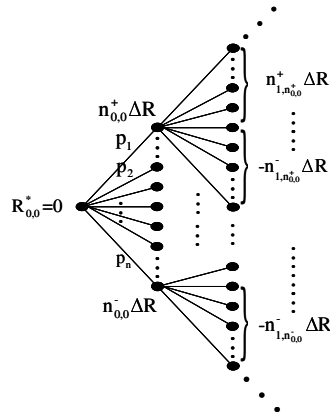


圖 13：第一階段多元平行樹

假設每一節點會有 n 條分枝， $p_1, p_2 \dots p_n$ 為其對應的機率，因為 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$ 服從期望值為 $-aR^*(t)\Delta t$ ，變異數為 $\sigma^2\Delta t$ 的常態分配，我們利用辛普森積分法求出每個節點對應的 $p_1 \cdot p_2 \dots p_n$ ，即

$$p_1 = \int_{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad p_2 = \int_{(n_{ij}^+ - 1.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*) \quad \dots \quad p_n = \int_{(n_{ij}^+ - 0.5)\Delta R}^{(n_{ij}^+ + 0.5)\Delta R} F(\Delta R^*)$$

如圖 14。

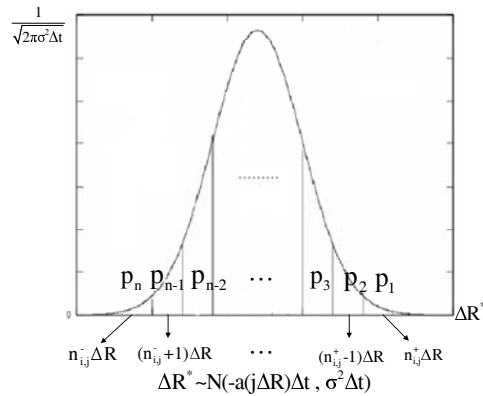


圖 14：求算節點 (i,j) 的分枝機率

越高的節點 (i,j) 會有越大的變數 j ，所求得的 p_1 會越小，即再往上的機率越小，相反地，越低的節點 $node(i,j)$ 會有越小的變數 j ，再往下的機率越小，恰能反映出 Hull-White 利率模型回歸平均值的特性。

(二) 第二階段

同 Hull-White 三元樹的第二階段，調整每一期往上平移的利率 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，建構與期初利率期間結構相同的利率樹，如此便可以利用多元樹與我們的數值方法來評價雪球型債券。

肆. 實證分析

本節針對在市場上交易的雪球型利率連動債券，首先利用市場上限買權 (Caplets) 之報價校正 Hull-White 模型參數 (a 、 σ)，建構符合市場期間結構的利率樹，進而求解雪球型債券的價格。之後，分析模型參數、債券參考的浮動利率與閉鎖期長度對債券價格的影響。

一、雪球型利率連動債券合約

以永豐銀行發行的雪球型利率連動債券合約為例，其發行期間為十年，發行價格為票面金額新台幣壹仟萬元整，計息與付息方式為自發行日起每季重設並單利付息一次，付息利率不得低於 0% 並延遲一期給付。第 i 季的票面利率 C_i 規格如下：

$$C_i = \begin{cases} 3\% & i = 0 \sim 3 \\ (C_{i-1} + S_i - r_i)^+ & i = 4 \sim 39 \end{cases}$$

其中固定利差 S_i 為

i	4~7	8~11	12~15	16~19	20~23	24~27	28~31	32~35	36~69
S_i	1.40%	1.65%	1.90%	2.15%	2.40%	2.65%	2.90%	3.15%	3.40%

格式化: 置中
格式化表格
刪除: I

浮動利率 r_i 為九十天商業本票。還本方式為到期日一次還本，發行機構得於此債券發行屆滿三年及以後各期付息日時，依票面金額贖回此債券。

二、評價雪球型利率連動債券

(一) 參數估計

1. 建構零息利率曲線

建構零息利率曲線的資料來源為為中華票券(見表 1)，時間從永豐銀行發行雪球型利率連動債券日期 2006/3/1，至債券發行到期日 2016/3/1。

表 1 自 2006/3/1 起十年的零息利率

期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率	期限(年)	零息利率
0.25	1.5160%	2.75	1.9420%	5.25	2.1466%	7.75	2.3572%
0.5	1.5900%	3	1.9678%	5.5	2.1691%	8	2.3744%
0.75	1.6505%	3.25	1.9898%	5.75	2.1918%	8.25	2.3917%
1	1.7115%	3.5	2.0118%	6	2.2145%	8.5	2.4090%
1.25	1.7497%	3.75	2.0339%	6.25	2.2372%	8.75	2.4264%
1.5	1.7880%	4	2.0561%	6.5	2.2601%	9	2.4439%
1.75	1.8264%	4.25	2.0730%	6.75	2.2830%	9.25	2.4614%
2	1.8649%	4.5	2.0900%	7	2.3059%	9.5	2.4790%
2.25	1.8905%	4.75	2.1070%	7.25	2.3230%	9.75	2.4966%
2.5	1.9162%	5	2.1241%	7.5	2.3401%	10	2.5143%

資料來源：中華票券

使用已求出的零息利率，即可利用遠期利率和零息利率的關係求出遠期利率

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1}$$

其中 $R(t, T_1)$ 為時間 t 至時間 T_1 的零息利率， $F(t, T_1, T_2)$ 為於時間 t 所觀察到時間 T_1 至時間 T_2 的遠期利率， $t < T_1 < T_2$ 。

2. 校正 Hull-White 模型參數

校正 Hull-White 模型參數的步驟如下：一、利用 Black 模型與市場資料求得

格式化: 縮排: 第一行: 0 字

刪除:

利用 Hull-White(1994)中提出的零息利率方程式

$A \cdot e^{-Bt} + C$ ，其中 t 表時間， A 、 B 、 C 為常數，與表 1 的零息利率和 Matlab 內建函數，估計出 $A = -0.01269$ ， $B = 0.1475$ ， $C = 0.02761$ ， $SSE = 3.418e-006$ ， $R\text{-square} = 0.9916$ 。

上限買權價值；二、求利率上限(Cap)價格；三、利用最小平方法(SSE)找出最適的回歸速度 a 、利率波動度 σ ，使得 Hull-White 模型求得的利率上限價值最接近市場價格。

第一與第二步驟以四年期的上限買權為例，資料來源為中國信託商業銀行的上限買權(Caplets)波動度報價（表 2），代入 Black 模型（式 2）求得每段期間的上限買權價格。第二步驟是將每期的上限買權價值加總，可得到期日分別為一、二、三和四年的利率上限(Cap)價格（表 3），例如一年到期，履約價為 1.5% 的利率上限，其價格為 0.25 年、0.5 年和 0.75 年的上限買權價值的總和。

表 2 四年期上限買權之波動度報價

期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)	期限 (年)	履約 價	Vol. 報價(%)
0.25	1.5%	8	0.25	2.5%	8	0.25	3.5%	8	0.25	4.5%	8
0.5	1.5%	8	0.5	2.5%	8	0.5	3.5%	8	0.5	4.5%	8
0.75	1.5%	8	0.75	2.5%	8	0.75	3.5%	8	0.75	4.5%	8
1	1.5%	8.538594	1	2.5%	8.360483	1	3.5%	8.321068	1	4.5%	8.314355
1.25	1.5%	9.065219	1.25	2.5%	8.712955	1.25	3.5%	8.635001	1.25	4.5%	8.621724
1.5	1.5%	9.603813	1.5	2.5%	9.073438	1.5	3.5%	8.956069	1.5	4.5%	8.936078
1.75	1.5%	10.14839	1.75	2.5%	9.437926	1.75	3.5%	9.280704	1.75	4.5%	9.253926
2	1.5%	11.1357	2	2.5%	10.14639	2	3.5%	9.837004	2	4.5%	9.778085
2.25	1.5%	12.12301	2.25	2.5%	10.85486	2.25	3.5%	10.3933	2.25	4.5%	10.30224
2.5	1.5%	13.08838	2.5	2.5%	11.54759	2.5	3.5%	10.93724	2.5	4.5%	10.81475
2.75	1.5%	14.07569	2.75	2.5%	12.25605	2.75	3.5%	11.49354	2.75	4.5%	11.33891
3	1.5%	14.81617	3	2.5%	12.97623	3	3.5%	12.06952	3	4.5%	11.85515
3.25	1.5%	15.55665	3.25	2.5%	13.69641	3.25	3.5%	12.6455	3.25	4.5%	12.37139
3.5	1.5%	16.29713	3.5	2.5%	14.41659	3.5	3.5%	13.22149	3.5	4.5%	12.88762
3.75	1.5%	17.02116	3.75	2.5%	15.12076	3.75	3.5%	13.78467	3.75	4.5%	13.39239

資料來源：中國信託商業銀行

表 3 用 Black 公式評價利率上限之現金價格

期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格	期 限	履約 價	現金 價格
1	1.5%	0.0020879	1	2.5%	3.41E-09	1	3.5%	0	1	4.5%	0
2	1.5%	0.00716633	2	2.5%	4.79E-05	2	3.5%	5.79E-09	2	4.5%	9.23E-14
3	1.5%	0.0136686	3	2.5%	0.000555042	3	3.5%	6.41E-06	3	4.5%	4.83E-08
4	1.5%	0.0215128	4	2.5%	0.00216609	4	3.5%	0.000135513	4	4.5%	7.76E-06

第三步驟是利用上限買權可視為一個零息債券賣權的特性(見附錄 A)，故可以利用 Hull-White 模型的零息債券賣權公式(式 6)來評價上限買權價值，再用第二步驟求得利率上限。而後使用 SSE 方法，找到能使兩者價格的平方差之和為最小的最適利率回歸速度 a 與利率波動度 σ ，即

$$\min_{a, \sigma} \text{SSE} = \min_{a, \sigma} \sum_k \sum_{i=1}^n (U_{ki} - V_{ki})^2$$

$$k \in \{1.5\%, 2.5\%, 3.5\%, 4.5\%\}$$

其中 U_{ki} 為 Black 模型算出的市場利率上限(Cap)價格， V_{ki} 為 Hull-White 模型的利率上限價格， k 為履約價格， n 為利率上限的到期日。

結果顯示，當 a 等於 0.014485 和 σ 等於 0.004596，得到最小 SSE 為 7.80133E-005，如表 4 與圖 15，故以(0.014485,0.004596)作為 Hull-White 模型的參數(a, σ)。

表 4 用 Hull-White 公式評價利率上限之現金價格

期限	履約價	現金價格	期限	履約價	現金價格	期限	履約價	現金價格	期限	履約價	現金價格
1	1.5%	0.002331	1	2.5%	3.20E-05	1	3.5%	6.50E-09	1	4.5%	4.96E-15
2	1.5%	0.007852	2	2.5%	0.000599	2	3.5%	8.94E-06	2	4.5%	1.79E-08
3	1.5%	0.01489	3	2.5%	0.002012	3	3.5%	9.27E-05	3	4.5%	1.24E-06
4	1.5%	0.023215	4	2.5%	0.00435	4	3.5%	0.000373	4	4.5%	1.32E-05

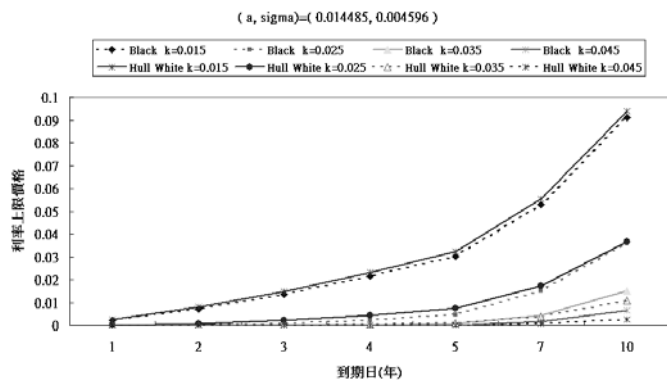


圖 15：Hull-White 模型與 Black 公式的利率上限價格

(二) 實證結果

利用第參節的數值方法以及利率上限所估計出來 Hull-White 模型參數，可求得發行日(2006/3/1)的雪球型利率連動債券價格(百分比)如表 5 所示，另外再以 2007/3/1 的殖利率曲線以及當時市場價格 100.2(百分比)與所得的票面利率 3.345%的資料，求得雪球型利率連動債券價格(百分比)如表 6 所示。

表 5 發行日(2006/3/1)的雪球型債券評價

Hull-White 樹狀結構	不可贖回的 雪球型債券	可贖回的雪 球型債券	可贖回條 款的價值	發行機構的報酬率(%) (面額-可贖回雪球型債券) / 可贖回雪球型債券
三元樹	113.901	88.0214	25.8796	13.6087
九元樹	116.566	88.1891	28.3769	13.3927

格式化: 置中, 縮排: 第一行: 0 字元

格式化: 字型: 粗體, (符號) 標楷體

表 6 2007/3/1 的雪球型債券評價

Hull-White 樹狀結構	不可贖回的 雪球型債券	可贖回的雪 球型債券	可贖回條 款的價值	發行機構的報酬率(%) (面額-可贖回雪球型債券) / 可贖回雪球型債券
三元樹	143.403	98.0057	45.3973	2.034882
九元樹	147.956	99.3724	48.5836	0.631564

格式化: 字型: 非粗體

格式化: 行距: 單行間距

格式化: 置中, 行距: 單行間距

刪除: 表 5 發行日(2006/3/1)的雪球型債券評價

雪球型債券的發行市價為依該債券面額平價發行，與模型評價的發行日債券價值有差距，由於該債券是在 OTC 市場交易，市場資訊較不完備，流動性並不好，與市場無套利機會之條件有差異，此結果與金融機構發行衍生性金融商品價格偏高情形符合。在 2007/3/1 時，三元樹與九元樹的評價結果(98.0057, 99.3724)則近似於市場報價(100.2)，市場交易較成熟時，本評價方法之結果更具參考性。

刪除: 表 6 2007/3/1 的雪球型債券評價

三、敏感度分析

根據前述雪球形債券的契約規格，可分析不同參數變動對債券價格的影響。

刪除:

(一)波動度 σ 對雪球型債券價格的影響

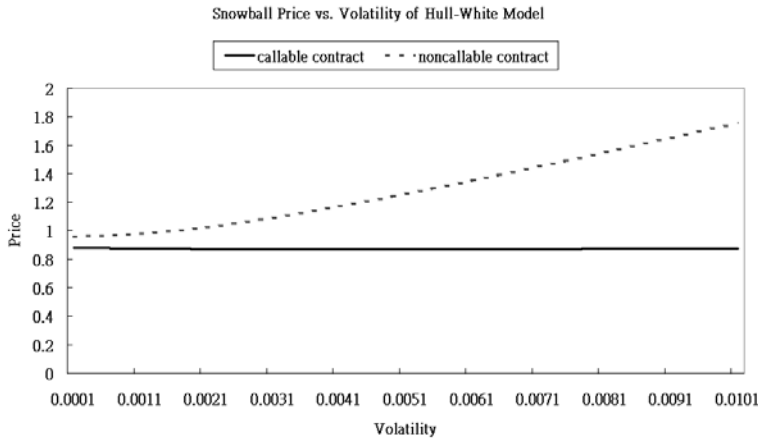


圖 16：波動度 σ 對雪球型債券價格的影響
 面額為一單位，利率回歸速度為 0.5%，零息利率方程式為 $r(t)=0.02363-0.007314*\exp(-1.316*t)$ 。

由圖 16 可知，當波動度 σ 越高，債券價格會越高。當波動度越大，代表利率可能發生極高或極低的水準，當利率為極低時，債券持有者會獲得高票面利率，因此債券價值會升高；當利率為極高時，會造成低票面利率，但因為票面利率有下限 0%，兩者效果相加會使得債券價值上升。對於有贖回條款雪球型債券，當利率為極低的情況下，發行機構有權贖回債券，會抑制債券價值過度上升，所以價格變化幅度不大。

(二)利率回歸速度 a 對雪球型債券價格的影響

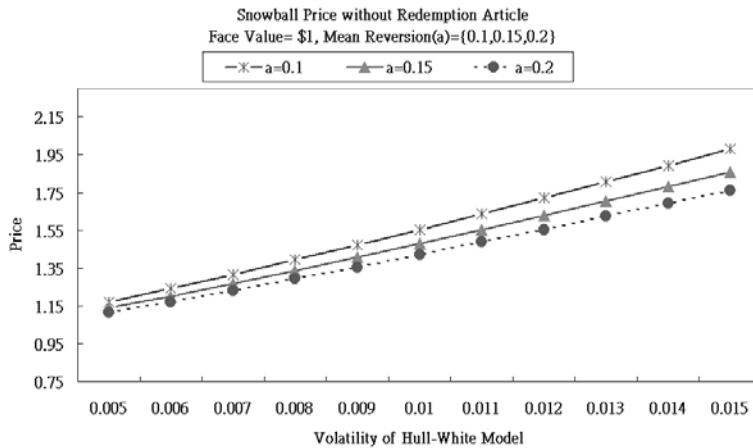


圖 17：利率回歸速度 a 對雪球型債券價格的影響
 面額為一單位，利率回歸速度為 0.1、0.15 和 0.2，零息利率方程式為

$$r(t)=0.02363-0.007314*\exp(-1.316*t)。$$

由圖 17 可知，對於不可贖回的雪球型債券，利率回歸速度 a 越小時，債券價值會越高。 a 越小，代表利率處高檔或低檔時，需要一段時間才會回歸到利率長期平均水準，故當利率為低檔時，債券持有者會得到高票面利率，且折現因子較小，因此債券價格上升，反之，當利率為高檔時，一樣因為票面利率有下限 0%，所以債券價格不會無限下降，故兩者效果相加，造成價格與利率回歸速度 a 負相關。

(三) 零息利率對雪球型債券價格的影響

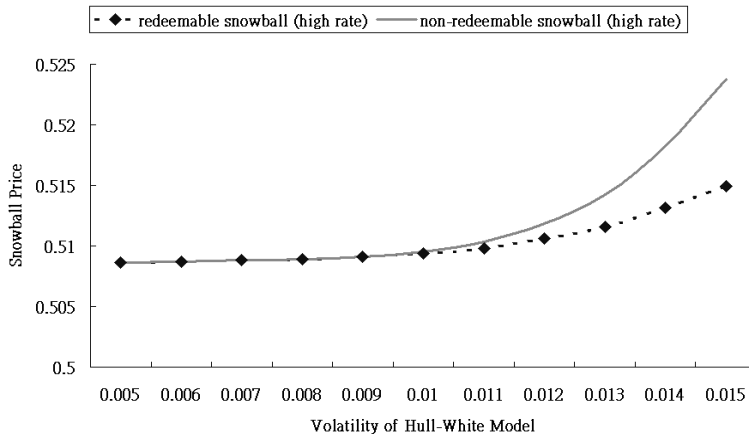


圖 18：零息利率對雪球型債券價格的影響
面額為一單位，利率回歸速度為 0.1，零息利率方程式為 $r(t)=0.08-0.05*\exp(-0.18*t)$ 。

圖 18 為高零息利率對債券價格的變化；當利率上升時，會使得票面利率降低，此時發行機構不會行使贖回條款，故兩種價格會重合。但是當波動度 σ 越大，則利率走勢有可能走到低檔，使得票面利率增加，發行機構行使贖回條款，故不可贖回的雪球型債券價格較高。

圖 19 探討不同形態的殖利率曲線：一直上升、持續下降、以及殖利率反轉等三種現象對債券價格的變化，資料為美國公債每天殖利率資料(如表 7)，並且使用 matlab 內建函數 Spline 內差法求得殖利率曲線(yield curve)。

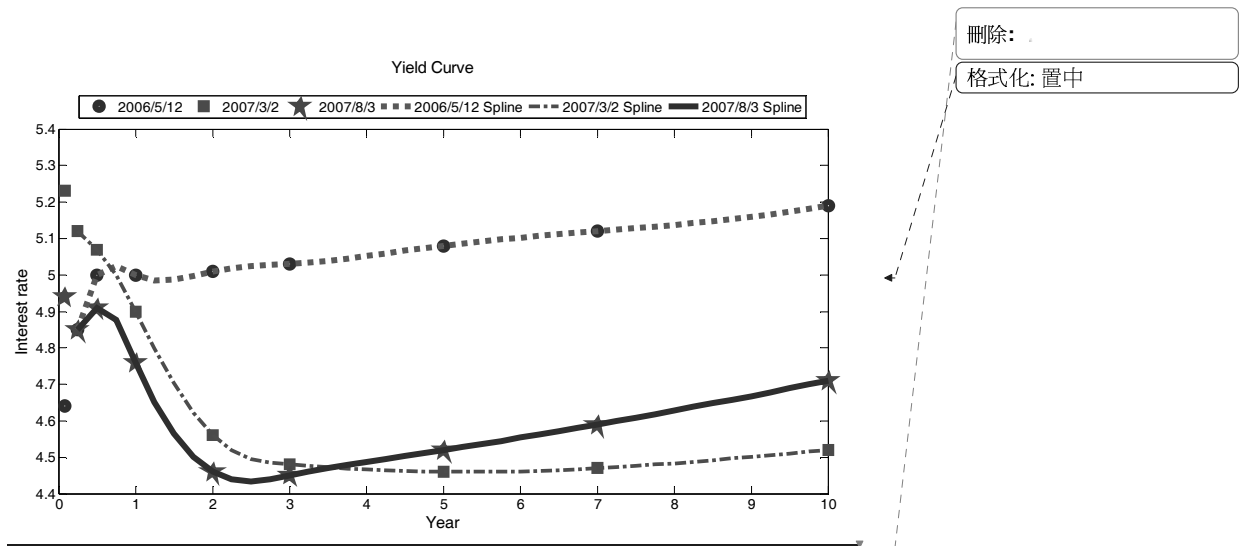


圖 19：不同形態的殖利率曲線

表 7 不同形態的美國公債殖利率資料

期限 \ 日期	2006/5/12	2007/3/2	2007/8/3
一個月	4.64	5.23	4.94
三個月	4.85	5.12	4.85
六個月	5	5.07	4.91
一年	5	4.9	4.76
兩年	5.01	4.56	4.46
三年	5.03	4.48	4.45
五年	5.08	4.46	4.52
七年	5.12	4.47	4.59
十年	5.19	4.52	4.71

資料來源：美國財政部 <http://www.ustreas.gov/>

假設其他條件與實證分析中，永豐銀行發行雪球型契約相同，除了固定利差 S_i 為

i	4~7	8~11	12~15	16~19	20~23	24~27	28~31	32~35	36~69
S_i	2.80%	3.30%	3.80%	4.30%	4.80%	5.30%	5.80%	6.30%	6.80%

因美國公債利率與九十天商業本票利率波動範圍不同，因此調高固定利差 S_i ，以

顯示不同殖利率曲線對雪球型價格的影響。

表 8 不同形態的殖利率曲線之雪球型債券評價

殖利率曲線日期	2006/5/12	2007/3/2	2007/8/3
可贖回的雪球型債券	67.5514	75.2909	73.1753
不可贖回的雪球型債券	81.3945	108.953	97.8975

格式化: 字型: 粗體, (符號) 標楷體
 格式化: 置中
 格式化表格

由於雪球型債券有反浮動的特性，殖利率曲線持續走高(2006/5/12)的債券價格，較低於殖利率反轉(2007/8/3)或者持續下降(2007/3/2)的債券價格，又因殖利率曲線有反轉的現象，後期的利率走高使得雪球型債券的票面利息降低，所以2007/8/3之雪球型債券價格低於2007/3/2價格。

格式化: 縮排: 第一行: 2字

_(四)閉鎖期對雪球型債券價格的影響

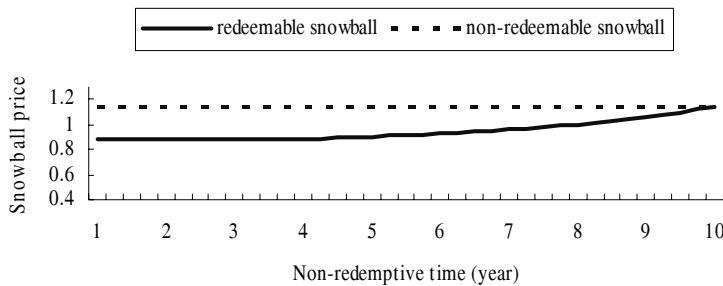


圖 20：閉鎖期對雪球型債券價格的影響

面額為一單位，利率回歸速度為 0.014485，波動度為 0.004596，
 零息利率方程式為 $r(t)=0.02363-0.007314*\exp(-1.316*t)$ 。

刪除: 19

由圖 20 可知，當閉鎖期越長，可贖回的時間越少，所得的債券價值越高，直到逼近不可贖回型債券的價格。

刪除: 19

伍. 結論

本文結合 Hull-White 利率模型和求面積法，提出一個有效率評價雪球型債券並同時降低分配誤差的方法。本文發現在 Hull-White 利率樹下，雪球型債券在付

息日所可能支付的票面利率皆可用通式 $\alpha_t + K\Delta R$ 或 0 來表達，這個特性幫助我們有效率地處理複雜的票面利率計算。此外，本文將求面積法導入 Hull-White 利率樹中，以減少分配誤差。本文最後以永豐銀行發行的雪球型債券為實證資料進行評價，並討論不同參數(如利率波動度及利率回歸速度等)對債券價格的影響，發現發行價格偏高，而參數影響則與預期相符。本研究雖僅針對一個實例進行演算，但此類複雜之利率衍生性商品，過去並無適合之評價方法，本研究提出具體可行的數值分析方法與評價步驟，對未來此類商品之發行與交易，應可提供投資者與金融機構參考。

參考文獻

- 王志勳，2007，結合 Hull-White 利率模型與求面積法評價雪球型債券，交通大學財務金融研究所碩士班論文。
- 戴慈，2007，以 Hull-White 短利模型評價雪球型債券，交通大學財務金融研究所碩士班論文。
- Andricopoulos, A.D., M. Widdicks, P.W. Duck, and D.P. Newton, 2003, "Universal option valuation using quadrature methods." *Journal of Financial Economics*, 67, 447-471
- Bender, C., A. Kolodko, and J. Schoenmakers, 2005, "Iterating Snowballs and related path dependent callables in a multi-factor Libor model." *Working Paper*
- Black, F., 1976, "The Pricing of Commodity Contracts." *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179
- Black, F., and P. Karasinski, 1991, "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal." *Financial Analysts Journal*, 52-59
- Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, 1997, "The Market Model of Interest Rate Dynamics." *Mathematical Finance*, 7, no. 2, 127-155
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, 1982, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, 53, 385-407
- Dai, T.-S., Lyuu, Y.-D., 2007, "An Exact Subexponential-Time Lattice Algorithm for Asian Options." *Acta Informatica*, 44, No. 1, 23--39
- Dai, T.-S., Huang, G.-S., Lyuu, Y.-D., 2005, "An Efficient Convergent Lattice Algorithm for European Asian Options." *Applied Mathematics and Computation*, 169, Issue 2, 1458--1471
- Dai, T.-S., Lyuu, Y.-D., 2002, "Efficient, exact algorithms for Asian options with multiresolution lattices." *Review of Derivatives Research*, 5, 181-203

- Forsyth, P.A., Vetzal, K.R., Zvan, R, 2002, "Convergence of numerical methods for valuing path-dependent options using interpolation." *Review of Derivatives Research*, 5, 273-314
- Health, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, no. 4, 419-440
- Health, D., R. Jarrow, and A. Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology." *Econometrica*, 60, no. 1, 77-105
- Ho, T. S. Y., and S.-B. Lee, 1986, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims." *Journal of Finance*, 41, 1011-1029
- Hull, J. and A. White, 1990, "Pricing Interest Rate Derivative Securities." *Review of Financial Studies*, 3, no. 4, 573-592
- Hull, J., White, A., 1993, "Efficient procedures for valuing European and American path-dependent options." *Journal of Derivatives*, 1, 21-31.
- Hull, J. and A. White, 1993, "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices." *Advances in Futures and Options Research*, 6, 1-13
- Hull, J. and A. White, 1993, "The Pricing of Options on Interest Rate Caps and Floors Using the Hull-White Model." *Journal of Financial Engineering*, 2, no. 3, 287-296
- Hull, J. and A. White, 1994, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model I : Single Factor Models." *Journal of Derivatives*, 2, 7-16
- Hull, J. and A. White, 1996, "Using Hull-White Interest Rate Trees." *Journal of Derivatives*, 26-36
- Jamshidian, F., 1977, "LIBOR and Swap Market Models and Measures." *Finance and Stochastics*, 1, 293-330
- Kijima, M. and I. Nagayama, 1994, "Efficient Numerical Procedures for the

- Hull-White Extended Vasicek Model.” *Journal of Financial Engineering*, 3, 275-292
- Longstaff, F. A., and E.S. Schwartz, 2001, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Square Approach.” *The Review of Financial Studies*, Vol. 14(1), 113-147
- Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann, 1997, “Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rates.” *Journal of Finance*, 52, no. 1, 409-430
- Vasicek, O. A., 1977, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure.” *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188

附錄 A

推導上限買權(Caplet)為一個零息債券賣權

在時間 t_k , 上限買權(Caplet)支付於時間 t_{k+1} 的價格為：

$$\frac{L\Delta k}{1+r_k\Delta k} \max(r_k - K_{R_cap}, 0)$$

其中

K_{R_cap} : 上限水準

r_k : 介於 t_k 與 t_{k+1} 之間, 在時間 t_k 觀察到的利率水準

Δk : 為 t_k 到 t_{k+1} 的時間長度

L : 名目本金

因 Δk 與 K_{R_cap} 為常數, 所以我們將上述公式轉成：

$$\begin{aligned} \frac{L\Delta k}{1+r_k\Delta k} \max(r_k - K_{R_cap}, 0) &= L \max\left(\frac{\Delta k(r_k - K_{R_cap})}{1+r_k\Delta k}, 0\right) \\ &= L \max\left(\frac{1+\Delta k r_k - \Delta k K_{R_cap} - 1}{1+r_k\Delta k}, 0\right) \\ &= L \max\left(\frac{(1+\Delta k r_k) - (\Delta k K_{R_cap} + 1)}{1+r_k\Delta k}, 0\right) \\ &= L \max\left(1 - \frac{(1+\Delta k K_{R_cap})}{1+r_k\Delta k}, 0\right) \\ &= (1+\Delta k K_{R_cap}) L \max\left(\frac{1}{1+\Delta k K_{R_cap}} - \frac{1}{1+r_k\Delta k}, 0\right) \\ &= (1+\Delta k K_{R_cap}) L \max(K_{cap} - S, 0) \end{aligned}$$

其中

$$S = \frac{1}{1+r_k\Delta k}$$

$$K_{cap} = \frac{1}{1+K_{R_cap}\Delta k}$$

假設 K_{cap} 為賣權的執行價格, 賣權的標的物為零息債券, 債券到期日為 t_{k+1} , S

為在時間 t_k 標的物價值。