中 原 大 學
應 用 數 學 系
碩士學位論文

使用 trino-binomial tree 評價離散式障礙選擇權

pricing discrete barrier options with trino-binomial tree

指導教授：戴天時 林賜德
研 究 生：邱奕隆

中 華 民 國 九 十 六 年 七 月

摘　　要

時至工商業發達的現今，在各種行業追求營利收入的同時，也必須考慮在營運當中可能會面臨的各種風險，如：價格風險、信用風險…等，因為風險所造成的虧損影響有可能是非常巨大的，因而避險的考慮亦是不可或缺的一環，衍生性金融商品為現今各大行業所重視的避險工具之一，而選擇權(Options)是衍生性金融商品中頗為重要的一項產品，因此如何針對選擇權做出精確的評價是一個非常令人關注的問題，在實務上常使用數值模型來評價選擇權的價值，隨著模擬次數的增加，評價結果將越來越逼近理論價格，在利用數值模型評價時造成誤差的原因可能有兩種，分別為分配誤差(distribution error)與非線性誤差(nonlinearity error)，而且不同選擇權產品擁有不同的特性，如果想要使用特定方法來評價選擇權，面對評價的選擇權產品不同時，方法勢必要針對該產品做一些修正與推廣，評價的誤差雖然是難以避免的，卻可以盡可能的減小，在某些情形之下，只要對評價模型做一些適度的調整或改良，就有辦法對誤差的降低有些許的幫助，使得評價的結果更為精確。這一篇文章主要是將 TBT model (Trino-Binomial Tree) 做某種層面上的推廣，讓 TBT model 的應用能更進一步推廣在 Discrete Barrier Options 的評價上，將原本的建構方法再透過一些適度的模型調整動作，盡可能的減少模型建構上所造成的誤差，使得評價結果能夠更加精確，讓原本的模型再做更進一步的推廣與應用。

Abstract

With the rapid growth of financial market today, each firm must consider all of the risks they may encounter, such as price risk and credit risk. Since risks may lead to financial loss, how to hedge becomes more and more important. There are many ways of hedging, and derivative is one of hedge tools on which each business puts emphasis. Among derivative, options is the most important product, and how to evaluate exact option value becomes an interesting question. Practically, we usually apply numerical model to evaluate exact option value. When we simulate for more and more times, we can get the more precise theoretical value. Generally speaking, there are some possible sources of error when we apply numerical model, such as distribution error and the nonlinearity error. If we want to evaluate options, we must apply different methods according to the option since different options have different features. Although errors cannot be fully avoided, we still have to revise the method while applying it in order to get the more precise option value. This article mainly applies TBT model (Trino-Binomial Tree) to Discrete Barrier Options, revising the original model to reduce possible errors and gets the more accurate outcome.

謝　　誌

把一件事情從無到有的完成是不容易的，在這一篇論文的寫作當中讓我有了深刻的體驗，過程當中不少人的指導與幫助更是讓我受益匪淺。

首先必須要感謝我的指導老師：戴天時老師與林陽德老師，在我遇到問題感到疑惑時適時的指導我，並給予我不少的建議與方向，也感謝林士貴老師與王之彥老師在百忙之中仍抽空前來參加口試，並對論文的寫作與想法提供了新的意見與指正，在這邊對各位老師致上謝意。

接下來，也感謝在學習過程當中各位同學：鈺騏、李揚、圜鋼、芳儀、國軒、景棠、亞竹、鴻蓉、柏青、念修、韻璇、玉芝、佩珊、麗娟、宗威…，感謝你們在學習的過程當中給我的意見、鼓勵與指導。

最後，感謝父母的栽培與家人們陪伴，讓我能夠在碩士這段求學之路當中能夠堅定的走下去。

這一篇論文如果不是大家的幫助是沒有辦法完成的，在完成之際，也請讓我對各位表達心中的謝意，感謝。

目　　錄

圖　目　錄

1 導論

衍生性金融商品是現在金融商品中非常重要的一環，一般來說基本的衍生性金融商品有四種，分別是選擇權、期貨、遠期契約、與交換，而所謂的選擇權就是一種契約，買方有權利在未來某段時間以約定好的價格買入或賣出某一特定的標的物，而選擇權的持有人可以選擇履約，也可以選擇不履約，選擇權可以說就是一種買賣標的物的權利。期貨與選擇權相似，但是期貨無法像選擇權一樣可以選擇是否履約，它是採取每日結算的方式，價格也不像選擇權那樣事先就約定好，是經由市場的供需喊價來決定的。遠期契約可說是最早出現的衍生性金融商品，不過它是屬於雙方的一種合約，承擔可能被違約的風險也比較大。交換就和前三就比較不一樣，大體說來，交換就是指雙方在某一特定期間內交換一連串不一樣的現金流。

近年來衍生性金融商品的發展相當迅速，而台灣也在民國八十六年之後開始有了衍生性金融商品的交易。雖然衍生性金融商品原本的目的是在於避險的功能，但是由於它擁有付出少數保證金就能夠操作數倍價值資產的功能，也就是指它擁有以小博大的能力，財務槓桿相當高，所以除了打算避險的客戶之外，衍生性金融商品也吸引了不少投機者。

衍生性金融商品的交易越來越蓬勃，產品也由原本的擇權、期貨、遠期契約、與交換四種商品更進一步的延伸，商品種類越來越多也越來越複雜，當然評價的工作也越來越不容易，若是針對四種基本的商品探討會比較單純，但是由於產品複雜性的提高，評價的分析已經不能使用單純的分析，除了仰賴數學運算之外，尚需加上電腦的模擬，在兩者的相輔之下，才能夠針對複雜性高的商品評價。因此，衍生性商品對於理論的推導、評價模型的建構、程式的撰寫與效率、評價的精確度都相當的看重，畢竟這些要素對評價結果都有莫大的影響，所以對於這些要素做深入探討是一件非常必要的工作。

為了能夠精確的評價選擇權的價值，我們常會使用不同的方法希望能準確的

求得該選擇權的價值，譬如說著名的 Black-Scholes Formula，能夠藉著標的物的期初價格、價格波動度、無風險利率、履約價格、標的物距離到期日的時間再搭配常態分配來求得該選擇權的價值，擁有一個精確的公式解是一個非常理想的狀況，但是現實中的情況並非如此。在金融市場越發蓬勃的情況下，並非在所有的情況下我們都能夠順利的找到正確的評價公式，所以漸漸的發展出各種數值方法，以期在沒有公式的情況下依然能夠求得其解，這些常用的數值方法包括了以樹狀模型結構來評價選擇權的二元樹(binomial trees)、使用隨機的方法模擬出標的物價格的可能路徑再求其平均值的蒙地卡羅模擬法(Monte Carlo simulation)…等，當然常用的數值方法還有非常多種其他的方法，不再此一一列舉。不論是使用哪一種數值方法，不外乎是針對選擇權的某項特性或是行為加以研究分析，將其特性或是行為應用在實例上以獲得出評價的結果。雖然評價結果或多或少都會和實際情況有著些微的誤差存在，但是透過某些因子運算次數的增加或是調整都可以進一步的使誤差減少，尤其是在無法順利的求得評價公式的情況之下，數值方法的地位將越發重要。

降低評價誤差就是這一篇文章的主軸，我們將透過調整評價模型的方式來針對選擇權的其中一種產品－Discrete Barrier Options 做評價，改良評價模型 TBT 的結構，使得評價時會造成的誤差盡可能減少，讓評價的結果其精確度能更加的提升。

2 二元樹與 TBT

2-1 二元樹、分配誤差與非線性誤差

當我們在做評價選擇權的工作之時，由於未必有評價公式能夠使用，因此使用數值方法建構適當的評價模型是非常重要的工作，其中使用二元樹來評價選擇權是一個眾所皆知的方法，我們在此將二元樹做一個簡單的介紹，如圖(一)所示：

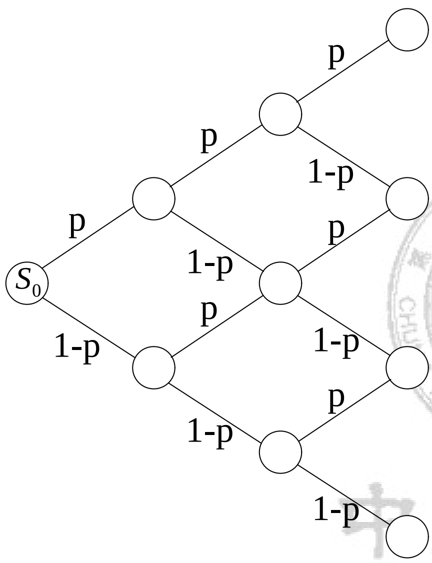


圖 (一)　二元樹

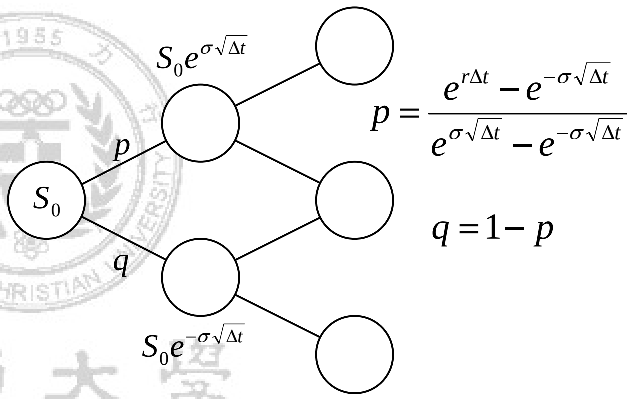
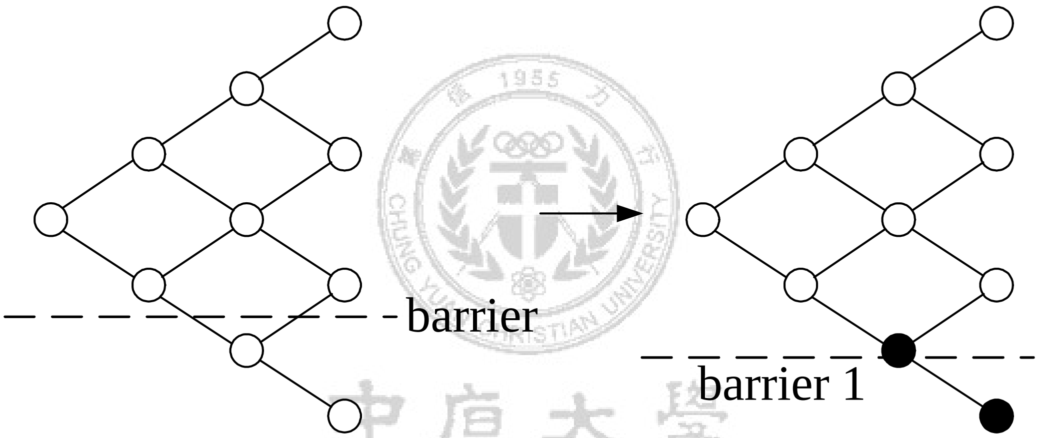


圖 (二)　CRR二元樹

假設標的物期初價格為 S_0，每一期的價格有 p 的機率可能會上漲與 1-p 的機率可能會下跌，也就是說針對一個節點只有上漲為某一個值或下跌為某一個值的可能性，在 1979 年 Cox、Ross、Rubinstein 提出了著名的 CRR 二元樹，如圖(二)所示，CRR 二元樹對於價格上漲與下跌的機率已定義明確的計算方式。在使用樹狀模型評價選擇權時，是用離散且有限的時間步驟去逼近對數常態分配(Lognormal Distribution)，而對數常態分配為一個連續型的分配，因此在這個過程中就會產生所謂的分配誤差(distribution error)，若是樹狀模型兩個節點之間的

間隔時間越小，則分配誤差就會越小。使用樹狀結構可能會碰到的另一個問題就是非線性誤差(nonlinearity error)，當被評價的選擇權是屬於路徑相依選擇權這一類的時候就有可能產生，以 Down-and-out call 爲例，如圖(三)所示，當價格的二元樹節點並沒有準確的碰到 barrier 時，我們只能夠轉變爲價值 barrier 之下的節點取爲零，也就是將圖(三)當中的黑色節點取爲零，但這和原本的 barrier 的所代表的價格畢竟不是相同的，相當於把原本的 barrier 移動到 barrier 1 之處，評價的結果當然就會和實際上的價值有所差異，這就是非線性誤差。



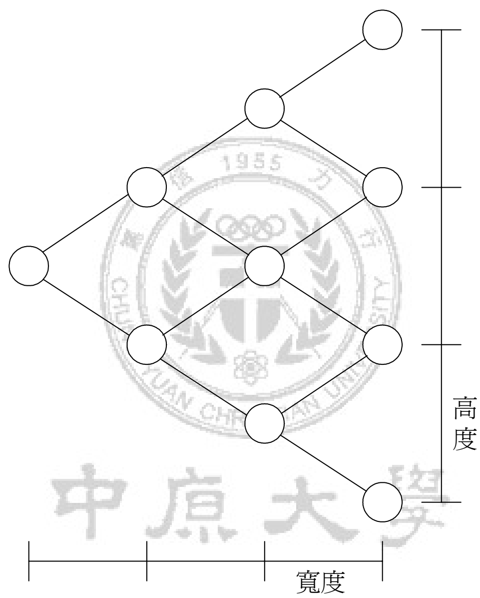
圖(三)　非線性誤差的產生

2-2 Trino-Binomial Tree(TBT)

在 2006 年，Tian-Shyr Dai、Yuh-Dauh Lyuu、Chih-Jui Shea 三個人提出了 Trino-Binomial Tree (以下簡稱 TBT)，並取使用 TBT 針對 barrier 爲連續型(continuous)的情況下做出分析，大體來說 TBT 使用了 CRR 二元樹的概念，再加以做一些調整，讓樹狀結構能夠準確的通過 barrier，以減少非線性誤差對評價結果所造成的影響。

那麼 TBT 是如何減少非線性誤差的呢？我們知道一般建立樹狀結構，我們是以節點之間的 ”寬度” 和 “高度” 這兩個自由度來調整它的模型結構(如圖(四))，若是同樣的以 Down-and-out call 爲例，在二元樹當中會如圖(三)造成非線性的誤差，而 TBT 就是巧妙的利用樹狀結構中的 ”寬度” 和 “高度” 這兩個自由度的調整，有效的減少非線性誤差，其中 ”寬度” 就是樹狀模型一期的時間長度。

如果是針對 single-barrier options 做評價時，TBT 會先將最後一期 barrier 會通過的節點先決定好，使樹狀結構一定會有節點可以順利的通過 barrier，如此一

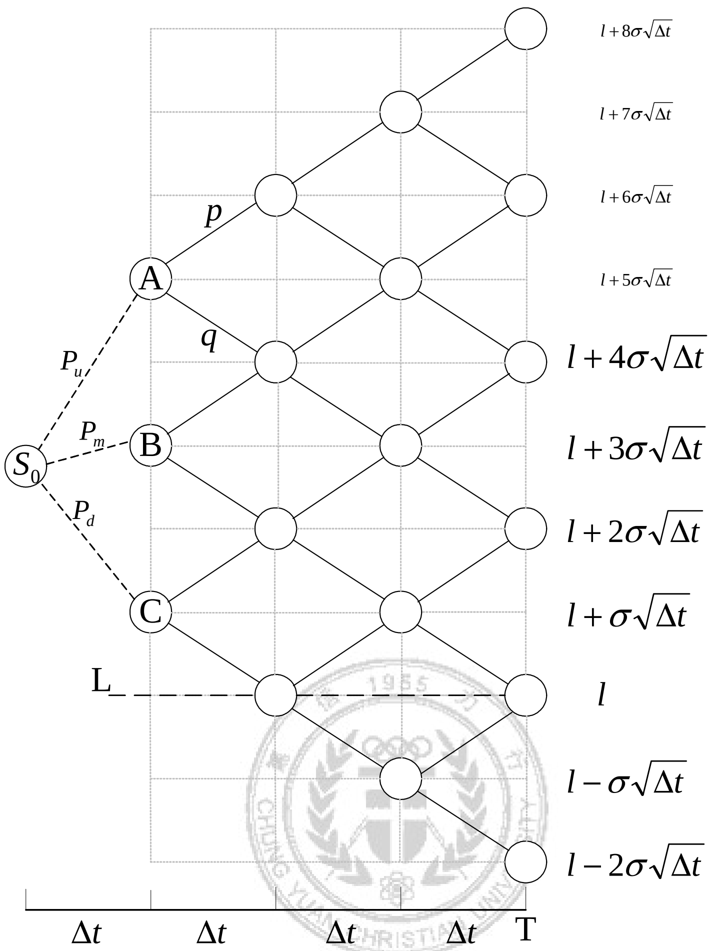


圖(四) 調整樹狀模型的自由度

來就可以減少非線性誤差，由於 single-barrier options 只需注意一個 barrier，所以當 barrier 會通過的節點決定好之後，只要藉著 ”寬度” 的調整就可以造出大略的結構，TBT 的 ”寬度” 主要是由兩點之間的時間間隔 ΔT 來決定，ΔT 是期初到交易日之間的時間長度 T 與樹狀結構所切之期數的比值，如圖(五)所示，TBT 除了第一期之外，其餘部分的結構猶如切去頂點的 CRR 二元樹，只有在模型剛開始期初價格 S_0 做連結時做了調整，第一期的結構與二元樹不同，它是以類似三元樹的方式連結到第二期的節點 A、B、C，到第二期的三個價值機率分別爲 P_u 、

P_m 、 P_d ，第二期之後價格的上漲與下跌機率就與 CRR 二元樹完全相同，而機率分別爲圖(五)當中的 p 與 q ，其中 $p=\dfrac{e^{r\Delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$ 而 $q=1-p$ 。

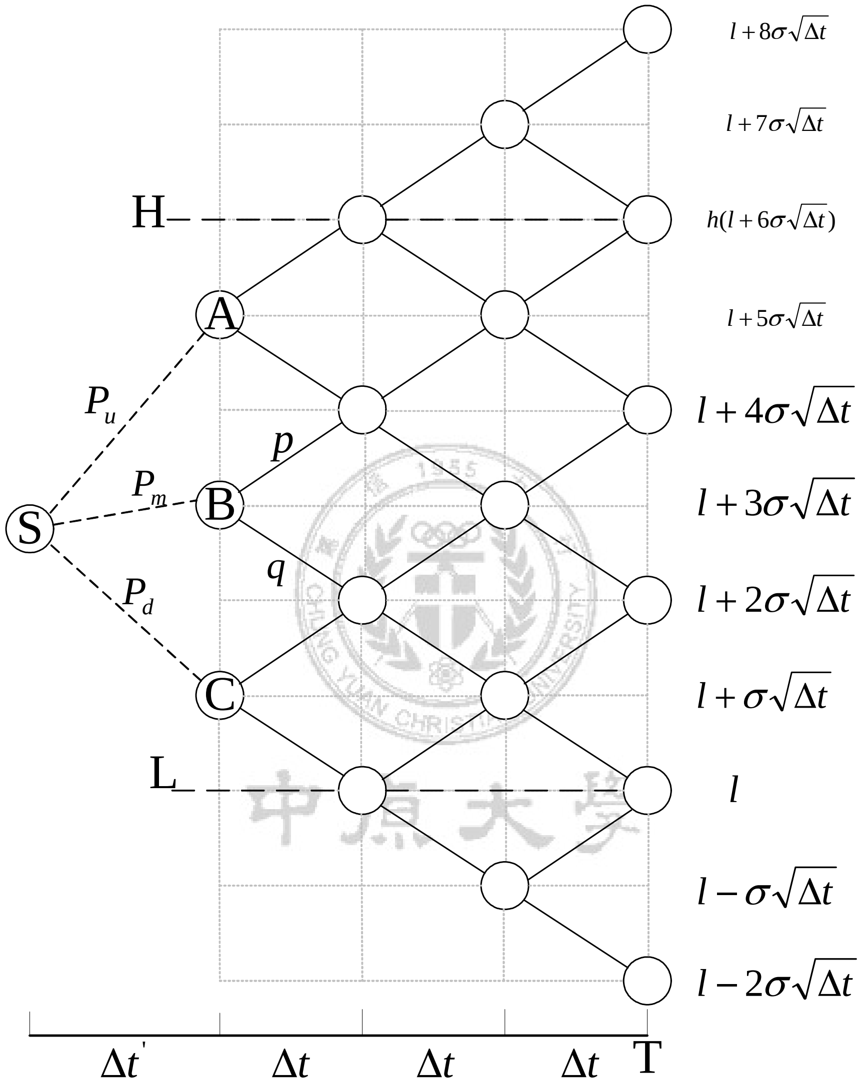
如果是在 double barrier options 情形下呢？由於 double barrier options 的 barrier 有兩個，分別令爲 H 和 L，想要有效的減少非線性誤差就必須使樹狀結構的節點都正好取在能夠通過兩個 barrier 的位置上，因此除了 ”寬度” 的調整之外，我們必須再加上另一個自由度，也就是 ”高度” 這個自由度，如圖(六)所示，在 double barrier options 的情形下，我們必須讓整個樹狀結構擁有能夠通過 H 和 L 的節點，而且由於每一期的價格到下一期的價格的漲跌幅度皆爲 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，其中 σ 爲股價的波動度，因此在同一期下的情況之下，兩個節點的間距爲 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，要使樹狀結構擁有能夠通過 H 和 L 的節點，就必須使兩個節點之間的間距爲 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍，而 H、L、 σ 皆爲某一特定常數，要使兩個節點之間間距爲 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 的整數倍就只能透過調整 Δt 來達成，因此 Δt 的值就在這個地方決定，但是此處決定的 Δt 並不一定能夠整除期初到交易日之間的時間長度 T，意即 T/ Δt 並不一定爲整數，因此需要再使用 ”寬度” 這個自由度來加以調整，在圖(六)可以看到除了第一期之外的其他結構仍然爲 CRR 二元樹，CRR 二元樹的時間間隔依然使用已經決定的 Δt ，但是由於 T/ Δt 並不一定爲整數，所以在第一期的時間間隔就不可能會等於 ΔT ，在這邊另第一期的時間間隔改變爲 $\Delta t^{'}$ ，決定的方式爲 $\Delta t^{'}=\mathrm{T}-(\left\lfloor \dfrac{T}{\Delta t}\right\rfloor-1)\Delta t$ ，並且 $\Delta t\le\Delta t^{'}<2\Delta t$ ，意即除了第一期的時間間隔爲 $\Delta t^{'}$ 之外，第二期之後時間間隔皆爲 Δt ，在機率方面與 single barrier 是相同的，在模型剛開始時期初價格 S_0 依然有 P_u 、 P_m 、 P_d 三種機率，除了第一期之外其餘依然和 CRR 二元樹的漲跌機率相同， $p=\dfrac{e^{r\Delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$ 而 $q=1-p$ 。



圖(五) 評價 Single Barrier Options 的 TBT

由上述可知 TBT 藉著兩個自由度的調整，使得評價模型中一定有節點能夠順利通過 barrier 的所在之處，不會有 barrier 正好通過兩個節點中間的情形發生，因此能夠有效的減少非線性誤差。但是上述所評價的 barrier 目前都是在 barrier 爲連續(continuous)的情形之下，如果說現在我們愈評價的選擇權它的 barrier 並不是連續的，而是離散(discrete)的情形之下的話，TBT 是否還有辦法達到減少非線性誤差的目的呢？這就是這篇文章所要探討的地方，在後面的內容我們會針對 barrier 爲離散的情形之下做討論，在 barrier 爲離散的情形之下建構出 TBT，而且在這樣的情形之下所建構出的 TBT，仍然能夠藉著調整自由度的方式使得評價模型的節點能夠順利的通過每一個 barrier 的點，不會有任何一點有碰不到的

情形發生，也就是說即使在 barrier 爲離散的情況之下，我們依然能夠建構出適合的 TBT，並且 TBT 依舊有辦法順利的碰到每一個 barrier，以達到降低非線性誤差的目的。



圖(六) 評價Double Barrier Options的TBT

3 TBT 在 Discrete Barrier Options 上的應用

3-1 符號的定義

我們在談到建構 TBT 的方法之前，先在這邊將文中所使用的符號先定義明白，這對我們之後的討論會很有幫助，不過仍然有一些符號在後面文中再定義會比較適合，若是屬於後面再定義會比較合適的那一類，將放在後面有需要的時候才會定義出來，另外評價時所使用的假設條件也會在這邊列舉出來，現在先讓我們把所使用的符號先定義清楚：

T ：選擇權從開始(即時間點 0)至到期日之間的時間長度。

S_t ：在時間點為 t 的時候的股價，其中 $0 \le t \le T$ 。

X ：選擇權的履約價格。

σ ：股價的波動度。

r ：一年的無風險利率。

S_t 會符合對數常態分配的隨機過程，亦即

$$S_{t+dt} = S_t \times \exp[(r - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dW_t]$$

其中 W_t 為標準的 Wiener process。

另外我們假設選擇權在交易的時候不會有什麼特殊的情形，也就是指在到期日當天買權(call)和賣權(put)的價值分別為 max($S_T - X$,0)與 max($X - S_T$,0)，至於較細節的符號將在後面再定義清楚。

3-2 在 Single Barrier Options 下 TBT 的建構

前一節已將一些符號定義清楚了，在接下來我們將探討 TBT 的建構方式，使用 TBT 針對 discrete barrier options 做評價，為了減少非線性誤差，我們將著重

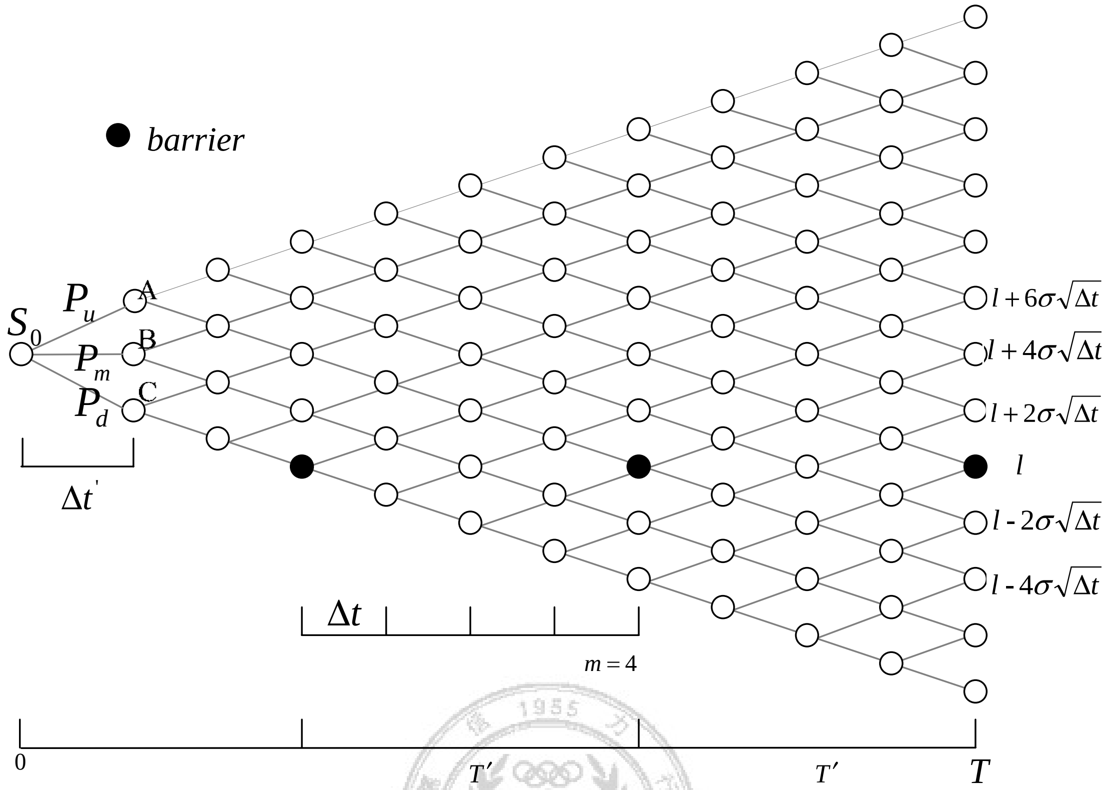
於 TBT 在評價時模型每一期的時間長度(意即 time step)的取法，透過每一期時間長度的調整讓評價模型能夠通過所有的 barrier，如此一來便可以順利減少非線性誤差，首先我們將先針對 single barrier 的情形做討論，在下一節再針對 double barrier 的情形做討論，因為 double barrier 的建構方式將會比 single barrier 稍微複雜一些。

關於 discrete single barrier option 的圖形請參考圖(七)，這裡我們以 down-and-out options 為例，從圖型來看和 barrier 為 continuous 的情況是非常相似的，其實模型的本身可以把它想像成一個把第一期的開始部份切掉的 CRR 二元樹，期初價格 S_0 分別以 P_u 、 P_m 、 P_d 三種機率連接到下一期的節點，在之後的部份可以說就是切去端點的 CRR 二元樹，圖中黑色節點表示 barrier 的部份，任兩個 barrier 之間的間隔時間是相等的，在圖中是以 T' 表示兩個 barrier 的間隔時間，值得注意的是 TBT 節點所代表的意義，TBT 並不是直接以股票的價值去計算評價的，而是以股票的價值與期初的價值先做比值再取自然對數來計算的，也就是假如股票的價值若為 V'，則在 TBT 當中的節點是以 $\ln(V'/S_0)$ 來表示其值，而我們知道 CRR 二元樹節點的漲跌幅各為 $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 與 $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，若是價值為 S_t 的股票在下一期的可能價值為 $S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 與 $S_t e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ ，又因為 $\ln(S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}/S_t)=\sigma\sqrt{\Delta t}$ 而且 $\ln(S_t e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}/S_t)=-\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，所以在 TBT 中除了第一期之外的漲跌幅為 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 及 $-\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，在評價模型當中，同一個時間點的每個節點所表示的價值差距應為 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，如圖(八)所示。

接下來我們的目標將放在建構 TBT 時的幾個重點上：(1)每一期時間長度的取法 (2)CRR 二元樹的價值定義 (3)模型第一期時的建構與其機率的計算。

(1) 每一期時間長度的取法

想要減少非線性誤差就不能有 barrier 出現在兩個相鄰節點之間的情況，現



圖(七)評價 Discrete Single Barrier Options的TBT

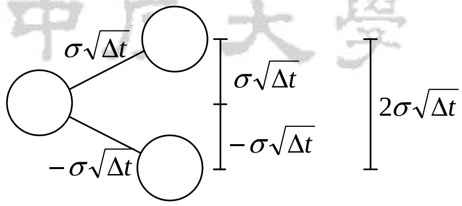


圖 (八) 兩節點間的間距

在我們先考慮模型中每一期時間長度的取法，我們將T'切為m個部份，故每一期時間長度$\Delta t = T'/m$，其中m為任意偶數，若為奇數將會有非線性誤差，在圖(七)當中為$m=4$的情況，決定了Δt之後馬上會面臨到一個問題，就是$T/\Delta t$並不一定為整數，因此我們在切去端點的 CRR 二元樹的部份只取$\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$次，也就是說

時間長度$\Delta t = T'/m$共有$\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$期,將剩下的部份取為TBT的第一期,我們以$\Delta t'$來表示其時間長度，意即$\Delta t' = T - (\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1)\Delta t$ ，明顯可以看出$\Delta t \le \Delta t' < 2\Delta t$ ，所以 TBT 所切割的時間當中包含了 CRR 二元樹部份時間長度為$\Delta t = T'/m$的部份共$\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$期，再加上第一期的時間長度為$\Delta t'$的部份，共計有$\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor$期。

(2)CRR 二元樹的價值定義

之前文中有提及 TBT 本身除了第一期之外，其餘部份即為 CRR 二元樹，而每一節點的價值各表示為何，將採用以下取法定義各點價值，假設 barrier 的價值為L，依照前述的取法，我們在 TBT 中可以將 barrier 的價值表示為$\ln(L/S_0)$ ，令$l = \ln(L/S_0)$ ，又因為同一個時間點的每個節點價值差距應為$2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，因此在模型當中為 CRR 二元樹的價值可以表示如下：令j為整數，當 CRR 的時間步驟為偶數(time step∈ even)，模型中的價值可以表示為$l + 2j\sigma\sqrt{\Delta t}$ ；若是時間步驟為奇數(time step∈ odd)，則模型中的價值可以表示為$l + (2j+1)\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，值得注意的是因為我們是先定義出 barrier $l = \ln(L/S_0)$ ，再由l和價值差距$2\sigma\sqrt{\Delta t}$去計算其他的部份，因此模型本身必定會通過 barrier，不會有碰不到的情形發生。

(3)模型第一期時的建構與其機率的計算。

接下來我們來看看在第一期時 A、B、C 三點的價值要如何決定，由股價對數常態分配的性質我們可以定義：$\mu \equiv (r - \sigma^2/2)\Delta t'$與$Var \equiv \sigma^2 \Delta t'$，之前我們有提到在同一個時間點下每個節點價值差距為$2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，因此在區間$[\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + \sigma\sqrt{\Delta t})$當中必存在唯一節點，我們就取這一點為 B，在圖(七)中 B 之值為$l + 4\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，令 B 為$\hat{\mu}$ ，$\hat{\mu}$是在第一期的所有節點當中價值最接近μ的，

剩下的 A 與 C 的值分別取爲 $\hat{\mu}+2\sigma\sqrt{\Delta t}$ 和 $\hat{\mu}-2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，定義以下三個值：

$$\beta = \hat{\mu} - \mu$$

$$\alpha = \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\gamma = \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma$ ，明顯的 α 必爲一個大於 0 的數，而 γ 必爲一個小於 0 的數，我們可以經由 α 、 β 、 γ 三個值帶入下面的聯立方程組來求 P_u 、 P_m 、 P_d 三個機率值：

$$P_u\alpha + P_m\beta + P_d\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$P_u\alpha^2 + P_m\beta^2 + P_d\gamma^2 = Var \qquad (2)$$

$$P_u + P_m + P_d = 1 \qquad (3)$$

第(1)、(2)式分別是由股價對數常態分配性質的第一階與第二階動差而得來的，第(3)式則是因爲機率總和爲 1，在解出 P_u 、 P_m 、 P_d 之後我們就可以計算在期初選擇權的價值，假設 V_y 表示在節點 Y 時的選擇權價值，則在 S_0 的選擇權價值就可以由下式求得其值：

$$V_{S_0} = e^{-r\Delta t'}(P_u \times V_A + P_m \times V_B + P_d \times V_C)$$

在最後這裡，我們將證明(1)、(2)、(3)式所解出的 P_u 、 P_m 、 P_d 三個機率值必定會滿足大於零的條件，證明的方法是採用 Cramer`s Rule，由 Cramer`s Rule 可以定義以下的計算式：

$$\det = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \quad \text{由於 } \alpha > \beta > \gamma \quad \text{可知 } \det < 0$$

$$\det_u = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ Var & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\beta\gamma + Var)(\gamma - \beta)$$ 由於 $\alpha > \beta > \gamma$ 所以 $(\gamma - \beta) < 0$ 又因爲

$$\beta\gamma + Var = \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2 \Delta t' \geq \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2 \Delta t = (\beta - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 > 0$$

可知 $\det_u \leq 0$

$$\det_m = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha^2 & Var & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha\gamma + Var)(\alpha - \gamma)$$ 由於 $\alpha > \beta > \gamma$ 所以 $(\alpha - \gamma) > 0$ 又因爲

$$\alpha\gamma + Var = \beta^2 - 4\sigma^2 \Delta t + \sigma^2 \Delta t' \leq \beta^2 - 4\sigma^2 \Delta t + 2\sigma^2 \Delta t = \beta^2 - 2\sigma^2 \Delta t < 0$$

可知 $\det_m < 0$

$$\det_d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & Var \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha\beta + Var)(\beta - \alpha)$$ 由於 $\alpha > \beta > \gamma$ 所以 $(\beta - \alpha) < 0$ 又因

爲 $\alpha\beta + Var = \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2 \Delta t' \geq \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2 \Delta t = (\beta + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 > 0$

可知 $\det_d < 0$

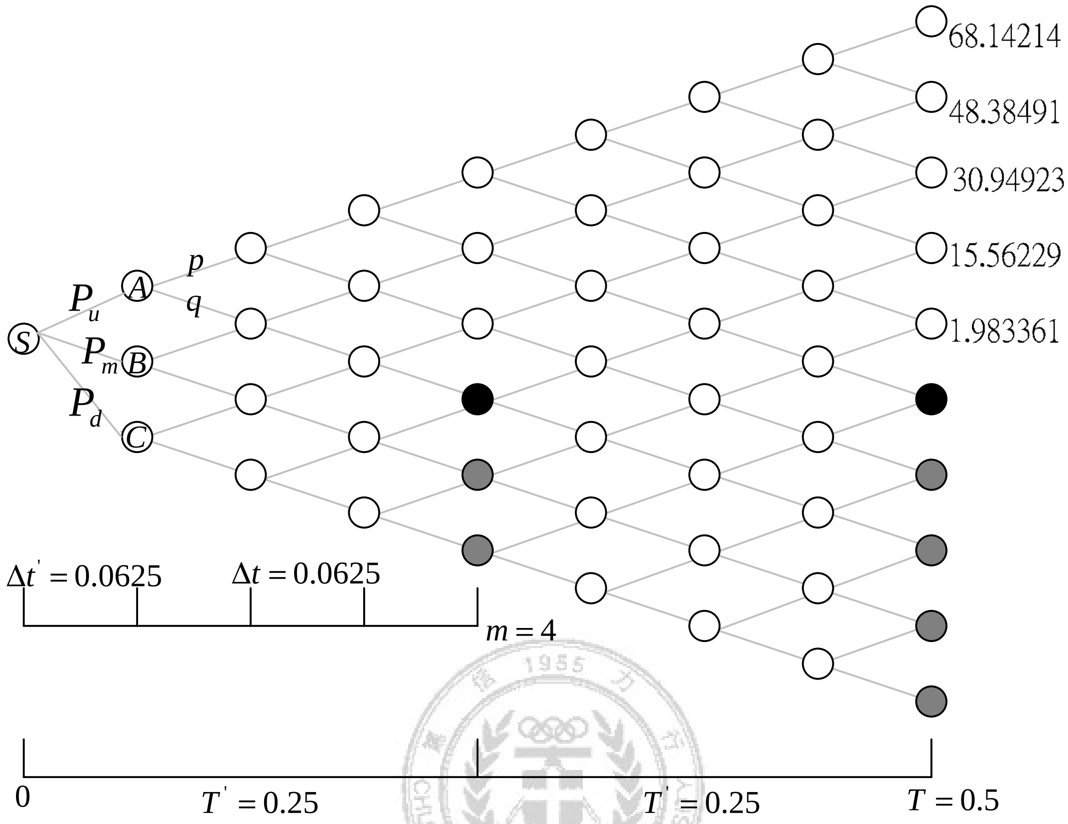
經由以上之推導，我們可以得證 $P_u = \det_u / \det > 0$ $P_m = \det_m / \det > 0$ $P_d = \det_d / \det > 0$

故由此方法所解得之 P_u 、 P_m 、 P_d 必大於零，且總和爲 1，故我們有：

$$0 < P_u \text{ 、 } P_m \text{ 、 } P_d < 1$$

在這裡我們舉一個簡單的例子來說明建構的方式，假設時間點 0 時的標的物價格 S_0 爲 100，選擇權的履約價格也是 100，無風險利率爲 5%，波動度爲 25%，選擇權距離到期日還有半年，亦即 T =0.5，monitoring frequency 爲 2，所以 T'=0.25，障礙價格 L =90，由以上的條件我們可以推得 $l \equiv \ln(L/S_0)$ =-0.10536，取 $m = 4$，$\Delta t = T'/m$ =0.0625，同一期的兩個節點之間價值差 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ =0.125，TBT

的圖形就如以下圖(九)：



圖(九) $m = 4$ 之 TBT 模型

其中黑色節點表示 barrier 之處，灰色節點則表示該節點價值在 barrier 之下，所以價值變為 0，故在最後一期時 barrier 之上的第一個節點價值的計算方式為

$S_0 \times \exp(l + 2\sigma\sqrt{\Delta t}) - X$ =1.983361，依照同樣的算法可得其餘節點的價值分別為

15.56229、30.94923、48.38491、68.14214，$\Delta t' = T - (\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1)\Delta t$ =0.0625，

$p = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$ =0.509403，$q = 1 - p$ =0.490597， $\mu \equiv (r - \sigma^2/2)\Delta t'$ =0.001172，

$Var \equiv \sigma^2 \Delta t'$=0.003906，所以取 B 為 $l + \sigma\sqrt{\Delta t}$ =-0.04286，$\beta = \hat{\mu} - \mu$=-0.04403，

$\alpha = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ =0.080968，$\gamma = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ =-0.16903，經由(1)、(2)、(3)式解得

P_u =0.363173、P_m =0.625914、P_d =0.010914，最後再由 Backward Induction 可以求得選擇權的價值應該為 7.830502。

3-3 在 Double Barrier Options 下的建構

在這個單元，我們再更進一步的探討在 discrete double barrier options 的情形之下，TBT 要如何建構，減少非線性誤差一樣是我們的首要目標，詳細的圖形可以參考圖(十)，黑色節點表示 barrier 之處，此圖形由於使用的足碼較多，所以改以橫向的方式放大，圖形乍看之下很複雜，但是仔細分析其實可以看出此圖相當於同時使用很多的 TBT 來評價，假設選擇權在同一時間點的兩個 barrier 分別以 H 和 L 表示，而在選擇權的存續期間的 barrier 可能不只一個，所以我們更進一步假設，從時間點 0 到 T 之間的 barrier 分別為 H_1、L_1、H_2、L_2、⋯、H_i、L_i ⋯、H_n、L_n，其中 n 為一大於等於 1 之整數，i 為 0 到 n 之間的任一整數，在根據之前所述這些 barrier 在 TBT 當中的價值可以表示為：

$$h_i = \ln(H_i / S_0) \qquad l_i = \ln(L_i / S_0) \qquad \text{其中 } n \ge i \ge 1 \text{ 且 } n \in N, i \in N$$

再假設從 S_0 到 H_1、L_1 的間隔時間為 T_1，H_1、L_1 到 H_2、L_2 的間隔時間為 T_2，H_2、L_2 到 H_3、L_3 的間隔時間為 T_3，…，H_{i-1}、L_{i-1} 到 H_i、L_i 的間隔時間為 T_i，…，H_{n-1}、L_{n-1} 到 H_n、L_n 的間隔時間為 T_n，在圖(十)當中即為 $n = 3$ 的情形。

接下來我們的目標將放在建構 TBT 時的幾個重點上：(1)每一期時間長度的取法 (2)CRR 二元樹的價值定義 (3)不同 T_i 之間模型之連接 (4)不同 T_i 之間模型機率之求法 (5)模型第一期時的建構與其機率的計算。

在談到這些重點之前，我們必須要先說明一件頗為棘手的事情，之前的探討把焦點都放在減少非線性誤差上，要想減少非線性誤差就必須讓評價模型能夠完美的通過每一個 barrier 的節點，由於每一對 H_i 與 L_i 之間的差不同，使得每一對 h_i 與 l_i 之間的差也會不一樣，假設我們把一期的時間長度切為 Δt，在之前我們提到兩個同時間點的節點差為 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$，要讓評價模型能夠完美的通過每一個 barrier

的節點，就必須讓我們所切的Δt對每一個i都符合以下的條件：

$$\frac{h_i - l_i}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \in N \qquad 其中 n \ge i \ge 1 且 n \in N , i \in N$$

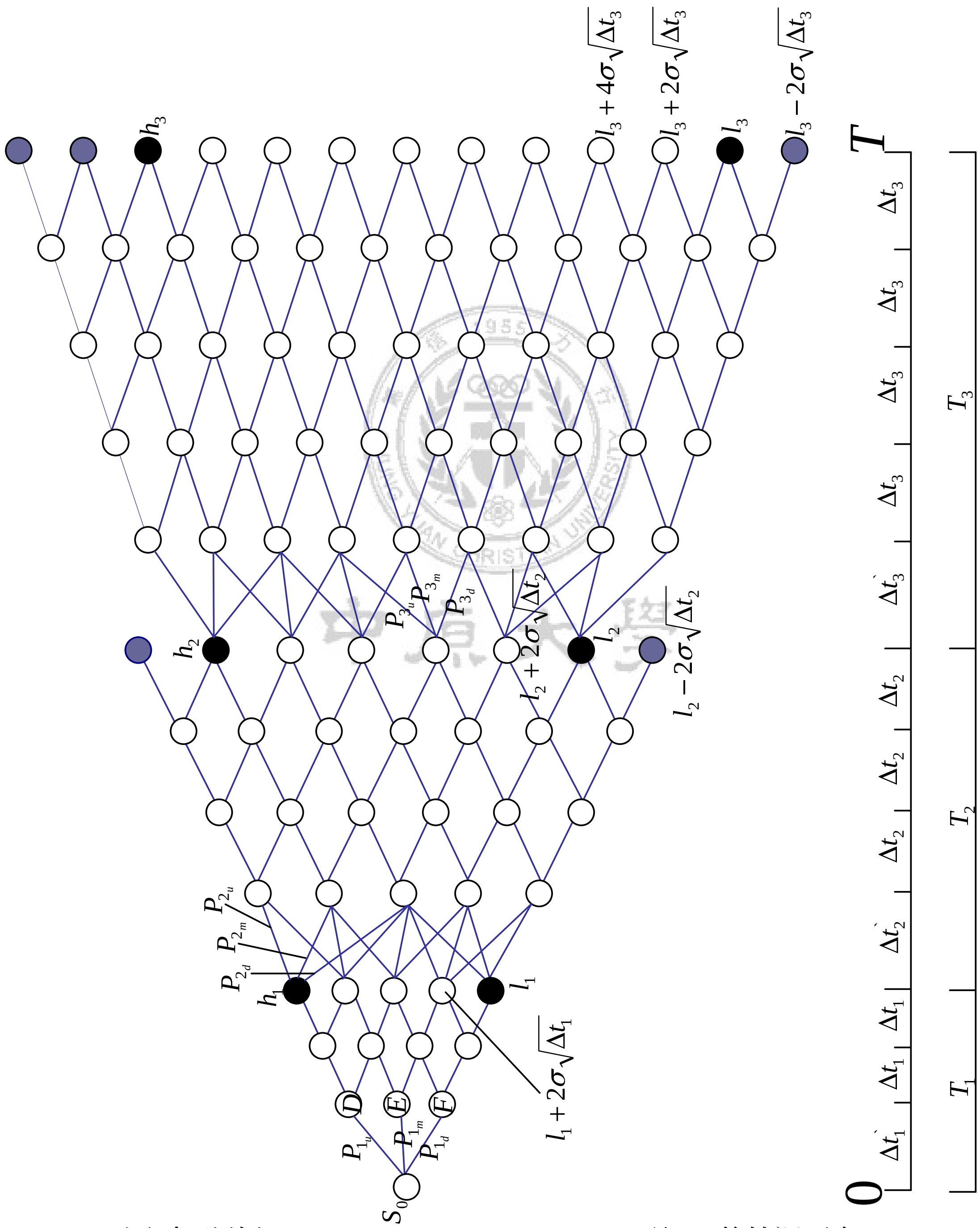
很明顯的，要找一個符合這種條件的Δt幾乎是不可能的事，畢竟$h_i - l_i$的值是我們沒有辦法掌握的，況且不同的選擇權可能會有不同的H_i 、L_i ，所以h_i與l_i也會不一樣，即使在某一個特定的情形之下真的找到了這樣的一個Δt ，也不能夠保證在任意的情形之下都一定找的到，因此我們必須另外想辦法造出能夠通過所有 barrier 節點的評價模型，既然無法找到符合這樣條件的Δt ，那我們退而求其次，不要只找一個Δt，也就是說把評價模型變成針對每一對h_i與l_i就取一次Δt_i ，那麼這個情況就能夠解決了，因此模型就會像圖(十)一般，每個h_i與l_i之間所取的Δt並不相同，再仔細的觀察可以發現模型結構在每一期T_i的評價模型可以看成很多個第一期長爲$\Delta t_i^{'}$，後面 CRR 二元樹一期長爲Δt_i的 TBT，整個模型就是由許許多多時間長度不同的 TBT 所構成的。

(1)每一期時間長度的取法

接下來我們先來談一談每一期時間長度的取法，首先觀察間隔時間爲T_n的情況下，爲了減少非線性誤差，我們必須讓 TBT 能夠順利通過H_n和L_n兩處，又因爲H_n 、L_n兩點的價值分別可以表示成$h_n = \ln(H_n / S_0)$與$l_n = \ln(L_n / S_0)$ ，假設在此一期所切割的時間長度爲Δt_n ，則兩個節點之間的間隔就爲$2\sigma\sqrt{\Delta t_n}$ ，要使 TBT 能夠順利通過H_n和L_n兩處，就必須讓$\frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta t_n}} \in N$成立，明顯可見要達成目標的關鍵在於$\Delta t_n$值所取的大小，如果我們想將$T_n$切成$m_n$段，直觀的想法是直接取一段長爲$\frac{T_n}{m_n}$ ，暫且令$\Delta\tau_n = \frac{T_n}{m_n}$ ，但是若這樣取的話可以看出$\frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau_n}}$並不一定爲整數，因此我們把$\Delta t_n$取的值改取爲一個接近$\Delta\tau_n$ ，但不比$\Delta\tau_n$大，且

要符合 $\frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta t_n}} \in N$ 這個條件，很自然的我們令 $\kappa_n = \left\lceil \frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta \tau_n}} \right\rceil$，

$\Delta t_n = (\frac{h_n - l_n}{2\kappa_n \sigma})^2$，如此一來就會有 $\frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta t_n}} = \kappa_n \in N$，讓 $\frac{h_n - l_n}{2\sigma\sqrt{\Delta t_n}} \in N$ 這個條件成



圖(十) 評價 Discrete Double Barrier Optionss且n=3的情況下之TBT

立，不過這樣的取法將會使T_n未必會被Δt_n整除，意即$\frac{T_n}{\Delta t_n}$未必爲整數，因此我們將T_n的第一期長度$\Delta t_n^{'}$改取爲$\Delta t_n^{'} = T_n - (\left\lfloor \frac{T_n}{\Delta t_n} \right\rfloor - 1)\Delta t_n$而$\Delta t_n \le \Delta t_n^{'} < 2\Delta t_n$，在$T_n$的評價模型可視爲很多個第一期時間長爲$\Delta t_n^{'}$，後面爲切去第一期長$\Delta t_n$總共有$\left\lfloor \frac{T_n}{\Delta t_n} \right\rfloor - 1$期的 CRR 二元樹。

在探討間隔時間爲T_n的情況下$\Delta t_i^{'}$和Δt_n的取法之後，不難發現其實不只在隔時間爲T_n之下可以這樣取，其實在其它時間間隔的部份也可以如法泡製，對於在間隔時間爲T_i的情況下(其中$i = 1...n$)，爲了減少非線性誤差一期所切割的時間長度Δt_i必須滿足$\frac{h_i - l_i}{2\sigma\sqrt{\Delta t_i}} \in N$，如果我們打算切爲$m_i$期，則取$\Delta\tau_i = \frac{T_i}{m_i}$，令$\kappa_i = \left\lceil \frac{h_i - l_i}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau_i}} \right\rceil$，再取$\Delta t_i = (\frac{h_i - l_i}{2\kappa_i\sigma})^2$，我們就會有$\frac{h_i - l_i}{2\sigma\sqrt{\Delta t_i}} = \kappa_i \in N$，又因爲$\frac{T_i}{\Delta t_i}$未必爲整數，我們將$T_i$的第一期長度$\Delta t_i^{'}$改取爲$\Delta t_i^{'} = T_i - (\left\lfloor \frac{T_i}{\Delta t_i} \right\rfloor - 1)\Delta t_i$而$\Delta t_i \le \Delta t_i^{'} < 2\Delta t_i$，則對於$i = 1...n$，每一個在$T_i$之下的評價模型可以視爲很多個第一期時間長爲$\Delta t_i^{'}$，後面爲切去頂點且每一期長$\Delta t_i$總共有$\left\lfloor \frac{T_i}{\Delta t_i} \right\rfloor - 1$期的 CRR 二元樹。

(2)CRR 二元樹的價值定義

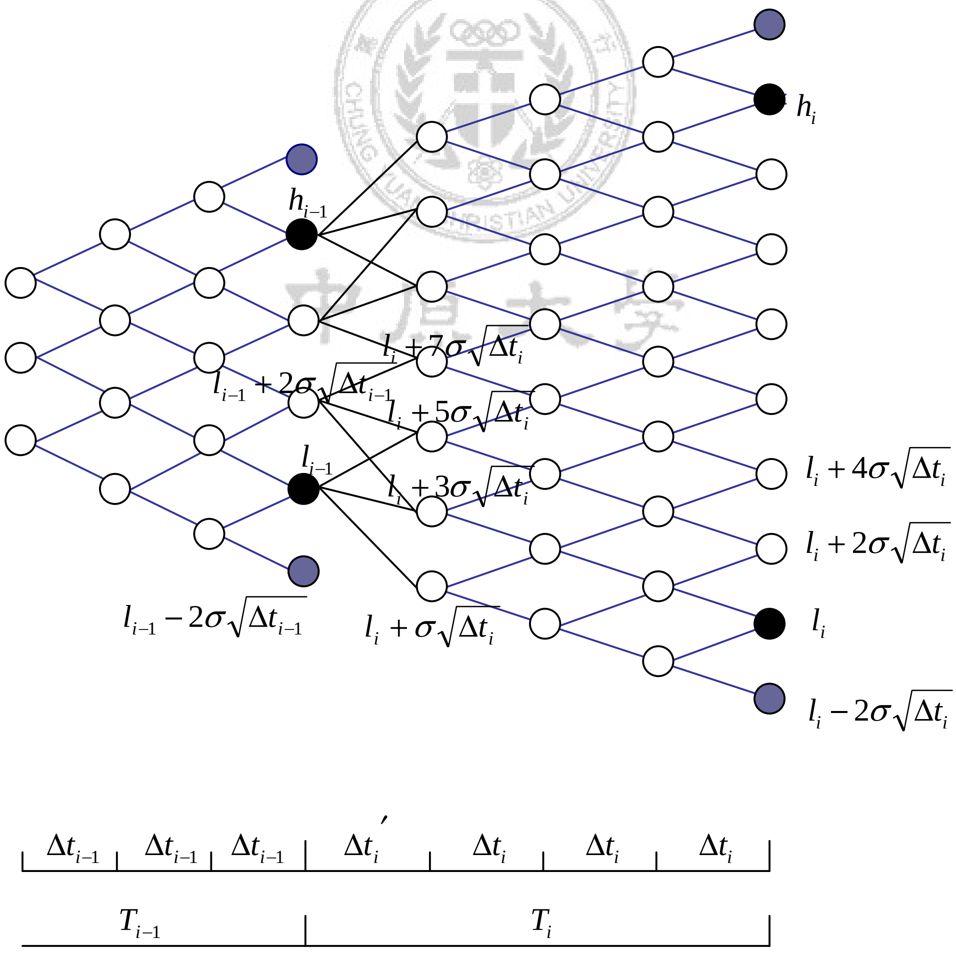
依照之前所述的方法我們可以將每一個間隔時間爲T_i(其中$i = 1...n$)的 CRR 二元樹所使用最後一期的節點的股價表示如下：令j爲整數，在T_i中最後一期的價值爲$l_i + 2j\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，且到期日的價值可以表示爲$l_n + 2j\sigma\sqrt{\Delta t_n}$，譬如說在圖(十)

當中在兩個不同時間點之下 barrier 之間時間間隔為T_3的情形之下，CRR 二元樹的最後一期節點股價為$l_3-2\sigma\sqrt{\Delta t_3}$、$l_3$、$l_3+2\sigma\sqrt{\Delta t_3}$、$l_3+4\sigma\sqrt{\Delta t_3}$、…，若是時間間隔為$T_2$的情形下，CRR 二元樹在$T_2$最後一期股價取為$l_2-2\sigma\sqrt{\Delta t_2}$、$l_2$、$l_2+2\sigma\sqrt{\Delta t_2}$、$l_2+4\sigma\sqrt{\Delta t_2}$、…，選擇權的價值則是由 backwards induction 求得，每一期由它們的下一期的價值藉著使用 backwards induction 求得，如圖(九)當中T_2的最後一期的價值由T_3的第一期求得，同理，時間間隔為T_1時由它們的下一期(即T_2的第一期)使用 backwards induction 求得。

(3)不同T_i之間模型之連接

上一段提到了 backwards induction，這個時候不禁要思考在時間間隔T_i的第一期和時間間隔T_{i-1}的最後一期我們要如何連接模型，也就是在每一個T_i中在$\Delta t_i^{'}$的時候連接方式為何？其實這裡所用的方式相當簡單，除了在$i=1$的情況之下外，其他部分都可以由下述方法來連接：先回想在圖(七)當中一開始S_0連接到 A、B、C 三點的情況，我們把時間間隔T_{i-1}最後一期的每一個節點想像成類似"S_0"的角色，接下來就類似分別在時間間隔T_i的第一期的節點當中去尋找屬於自己的"A" "B" "C"即可，現在我們先來談"B"的決定方法，參考圖(十一)，時間間隔T_{i-1}最後一期的每一個節點的位置可以表示為$l_{i-1}+2j\sigma\sqrt{\Delta t_{i-1}}$，其中$j$為任意整數，而時間間隔$T_i$的第一期在 CRR 二元樹所切的期數為奇數時，每一個節點的位置可以表示為$l_i+(2j+1)\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，若 CRR 二元樹所切的期數為偶數，每一個節點的位置可以表示為$l_i+2j\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，例如在圖(十一)當中的$T_i$切的期數是 3 期，圖(十)當中的$T_3$切的期數是 4 期，欲對時間間隔$T_{i-1}$當中的某一節點取它的"B"時，就是取時間間隔$T_i$的第一期所有的節點當中所表示的股價與該節點價值最接近的節點，"A"就取"B"的位置再加上$2\sigma\sqrt{\Delta t_i}$的節點，"C"就取"B"

的位置再減去的 $2\sigma\sqrt{\Delta t_i}$ 節點，已經在 barrier 之外的點可以不必取，譬如在圖(十一)中 l_{i-1} 它的“B”爲 $l_i+3\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，“A”爲 $l_i+5\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，“C”爲 $l_i+\sigma\sqrt{\Delta t_i}$；$l_{i-1}+2\sigma\sqrt{\Delta t_{i-1}}$ 它的“B”爲 $l_i+5\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，“A”爲 $l_i+7\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，“C”爲 $l_i+3\sigma\sqrt{\Delta t_i}$；$l_{i-1}-2\sigma\sqrt{\Delta t_{i-1}}$ 已經落在 barrier 之外，所以可以不必取，附帶一題，當 T_{i-1} 切的比 T_i 還要多期的時候，有可能會出現 T_{i-1} 最後一期的不同節點在 T_i 第一期的節點所取的“A” “B” “C”三點剛好取到同樣點的情況出現，一般的情形之下，T_i 第一期的每一個節點被取到的次數不一定會一樣多，最後，在時間間隔 T_0 的第一期(如圖(十)的 $\Delta t_1'$ 之處)與期初價格 S_0 相連的“A” “B” “C”取法就和上述的方法有一些不一樣，詳細的取法我們將放在後面再談。



圖(十一) 節點的連接

(4)不同T_i之間模型機率之求法

雖然我們已經把除了$\Delta t_1^{'}$之外的其他間隔時間爲$\Delta t_i^{'}$其中$i=2...n$的節點連接方式都決定好了，但是其機率爲多少呢？如圖(十二)所示，我們把時間間隔T_{i-1}最後一期的某一個節點連接到屬於自己的“A”時機率取爲P_{i_u}，該節點連接到屬於自己的“B”時機率取爲P_{i_m}，連接到屬於自己的“C”時機率取爲P_{i_d}，也就是說，在時間間隔T_{i-1}最後一期的該節點連接到時間間隔T_i的第一期時機率取爲P_{i_u}、P_{i_m}、P_{i_d}三種，而決定這三個值的機率與 Single Barrier Options 的情況非常類似，首先由股價對數常態分配的性質我們可以定義：$\mu_i \equiv (r-\sigma^2/2)\Delta t_i^{'}$與$Var_i \equiv \sigma^2 \Delta t_i^{'}$　其中$i=2...n$，由於在同一個時間點下每個節點價值差距爲$2\sigma\sqrt{\Delta t_i}$，因此我們一定可以在區間$[\mu_i-\sigma\sqrt{\Delta t_i}, \mu_i+\sigma\sqrt{\Delta t_i})$當中找到唯一的節點，將此節點令其爲$\hat{\mu}_i$，然後再取$\alpha_i$、$\beta_i$、$\gamma_i$三個值如下：

$$\beta_i = \hat{\mu}_i - \mu_i$$

$$\alpha_i = \hat{\mu}_i + 2\sigma\sqrt{\Delta t_i} - \mu_i = \beta_i + 2\sigma\sqrt{\Delta t_i}$$

$$\gamma_i = \hat{\mu}_i - 2\sigma\sqrt{\Delta t_i} - \mu_i = \beta_i - 2\sigma\sqrt{\Delta t_i}$$

其中$\alpha_i > \beta_i > \gamma_i$且$i=2...n$，明顯的$\alpha_i$必爲一個大於 0 的數，而$\gamma_i$必爲一個小於 0 的數，我們可以經由$\alpha_i$、$\beta_i$、$\gamma_i$三個值帶入下面的聯立方程組來求$P_{i_u}$、$P_{i_m}$、$P_{i_d}$三個機率值：

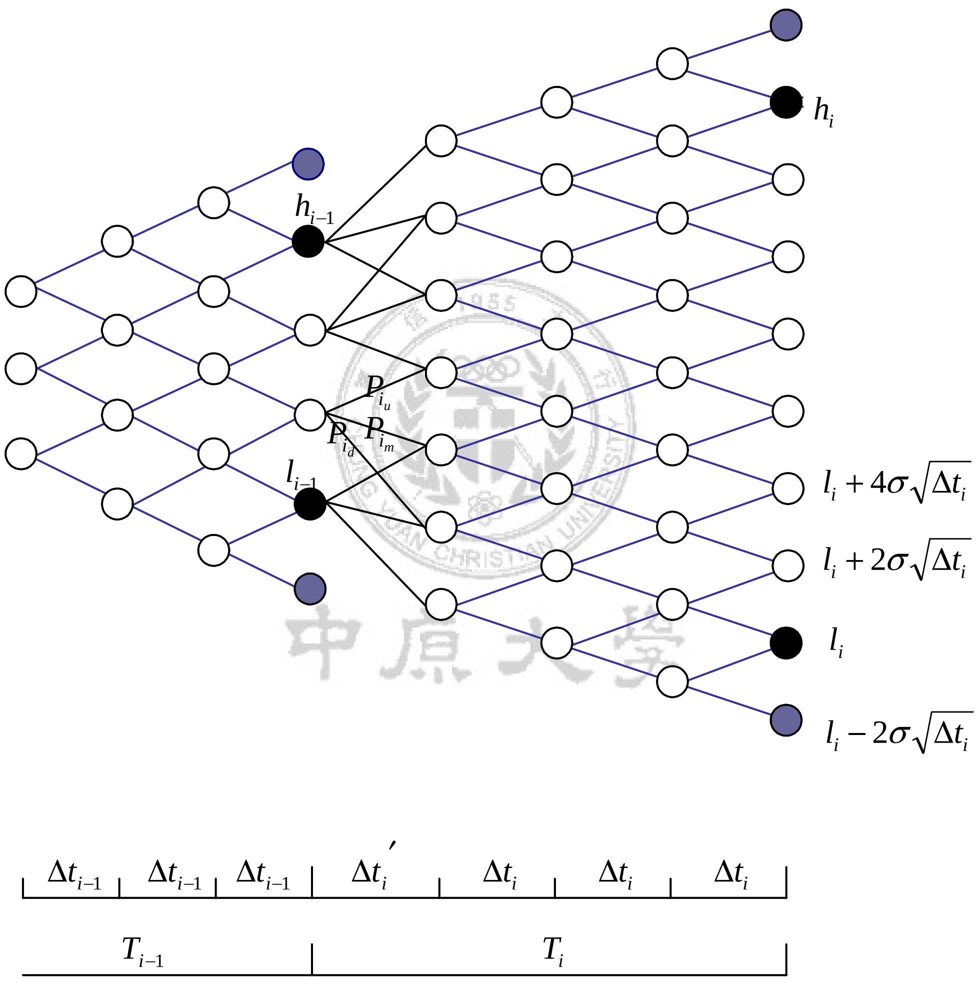
$$P_{i_u}\alpha_i + P_{i_m}\beta_i + P_{i_d}\gamma_i = 0 \qquad (4)$$

$$P_{i_u}\alpha_i^{\,2} + P_{i_m}\beta_i^{\,2} + P_{i_d}\gamma_i^{\,2} = Var_i \qquad (5)$$

$$P_{i_u} + P_{i_m} + P_{i_d} = 1 \qquad (6)$$

第(4)、(5)式分別是由股價對數常態分配性質的一階與二階動差而得來的，第(6)

式則是因爲機率總和爲 1，至此在$i = 2 \ldots n$之下的每個P_{i_u}、P_{i_m}、P_{i_d}三個機率皆已求得，在此也不難發現P_{i_u}、P_{i_m}、P_{i_d}三個機率值的求法和之前 single barrier 時所求的P_u、P_m、P_d幾乎是一模一樣的，故可以使用同樣的方法證明出P_{i_u}、P_{i_m}、P_{i_d}必滿足 0<P_{i_u}、P_{i_m}、P_{i_d}<1。



圖(十二) 節點的機率

至於在時間間隔T_{i-1}時的其他節點也可以利用同樣的方法求出其機率值，更一般來說，$i = 2 \ldots n$時T_i的第一期的機率值都可以使用同樣的方法來求得，需要注意的是每一期的t_i'可能不盡相同，當然μ_i和Var_i也可能不一樣，所以機率值也會有

所不同。

(5)模型第一期時的建構與其機率的計算

接下來我們把焦點放在與期初價格 S_0 相連的節點的取法與其機率的求法，爲了與 single barrier options 有所區別，我們將此三點令爲 D、E、F，其中 D 類似 single barrier options 的 A，E 類似 single barrier options 的 B，F 類似 single barrier options 的 C，詳細可以參見圖(十)，取法也與 single barrier options 時相當類似，由股價對數常態分配的性質我們可以定義：$\mu_1 \equiv (r-\sigma^2/2)\Delta t_1^{'}$ 與 $Var_1 \equiv \sigma^2 \Delta t_1^{'}$，由於在同一個時間點下每個節點價值差距爲 $2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$，因此我們可以知道在區間 $[\mu_1-\sigma\sqrt{\Delta t_1},\mu_1+\sigma\sqrt{\Delta t_1})$ 必定存在一個節點，令其爲 $\hat{\mu}_1$，將 E 的位置取在此，再取 D 的位置爲 $\hat{\mu}_1+2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$，F 的位置爲 $\hat{\mu}_1-2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$，將三點決定好之後，就可以求連接到各點的機率之值，而機率的求法也相當雷同，分別取 α_1、β_1、γ_1 三個值如下：

$$\beta_1 = \hat{\mu}_1 - \mu_1$$

$$\alpha_1 = \hat{\mu}_1 + 2\sigma\sqrt{\Delta t_1} - \mu_1 = \beta_1 + 2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$$

$$\gamma_1 = \hat{\mu}_1 - 2\sigma\sqrt{\Delta t_1} - \mu_1 = \beta_1 - 2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$$

其中 $\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1$，明顯的 α_1 必爲一個大於 0 的數，而 γ_1 必爲一個小於 0 的數，再經由 α_1、β_1、γ_1 三個值代入下方的聯立方程組來求出 P_{1_u}、P_{1_m}、P_{1_d} 三個機率值：

$$P_{1_u}\alpha_1 + P_{1_m}\beta_1 + P_{1_d}\gamma_1 = 0 \qquad (7)$$

$$P_{1_u}\alpha_1^{\,2} + P_{1_m}\beta_1^{\,2} + P_{1_d}\gamma_1^{\,2} = Var_1 \qquad (8)$$

$$P_{1_u} + P_{1_m} + P_{1_d} = 1 \qquad (9)$$

同樣的，第(7)、(8)式分別是由股價對數常態分配性質的一階與二階動差而得來

的，第(9)式則是因爲機率總和爲 1，且使用同樣的証明方法，我們可以得證 P_{1_u} 、P_{1_m} 、 P_{1_d} 三個機率值必定滿足 0< P_{1_u} 、 P_{1_m} 、 P_{1_d} <1。

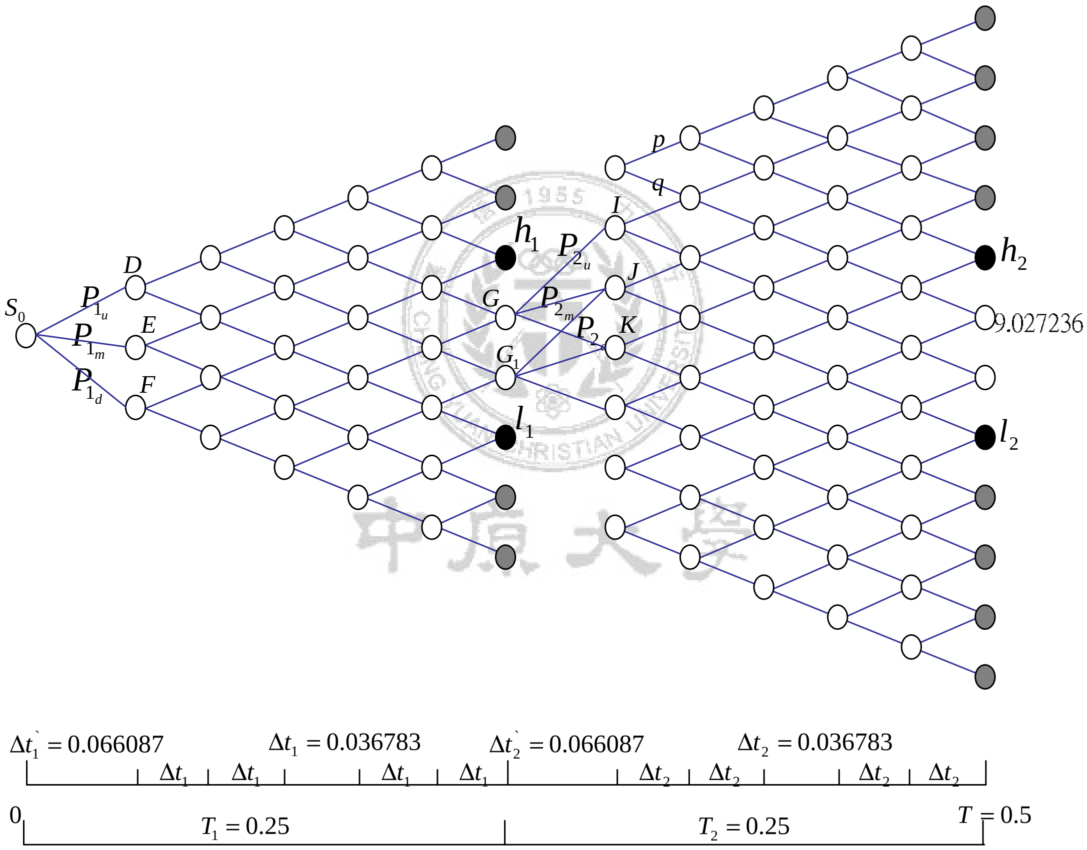
經由以上推導，假設 V_Y 表示在節點 Y 時的選擇權價值，則在 S_0 的選擇權價值就可以由 D、E、F 三點的價值再經由下式求得其值：

$$V_{S_0} = e^{-r\Delta t_0'}(P_{0_u} \times V_D + P_{0_m} \times V_E + P_{0_d} \times V_F)$$

在這裡我們舉簡單的例子來說明建構的方式，假設時間點 0 時的標的物價格 S_0 爲 100，選擇權的履約價格也是 100，無風險利率爲 5%，波動度爲 25%，選擇權距離到期日還有半年，亦即 T =0.5，monitoring frequency 爲 2，所以 $T_1 = T_2$ =0.25，障礙價格 $L_1 = L_2 = 90$、$H_1 = H_2 = 120$，由以上的條件我們可以推得 $l_1 = l_2 = \ln(90/S_0)$ =-0.10536、$h_1 = h_2 = \ln(120/S_0)$ =0.182322，取 $m_1 = m_2 = 5$ 可得 $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \frac{T_1}{m_1} =$ 0.05，$\kappa_1 = \kappa_2 = \left\lceil \frac{h_1 - l_1}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau_1}} \right\rceil =$ 3，$\Delta t_1 = \Delta t_2 = (\frac{h_1 - l_1}{2\kappa_1\sigma})^2 =$ 0.036783，同一期的兩個節點之間價值差 $2\sigma\sqrt{\Delta t_1} = 2\sigma\sqrt{\Delta t_2}$ =0.095894，圖形就如圖(十三)，其中黑色節點表示 barrier 之處，灰色節點則表示該節點價值在 barrier 之下或是超過了 barrier，所以價值變爲 0，故在最後一期時 barrier 之上的第二個節點價值的計算方式爲 $S_0 \times \exp(l_2 + 4\sigma\sqrt{\Delta t}) - X$ =9.027236，barrier 之上的第一個節點因爲價值比履約價格還要低，故該點價值變爲 0，$\Delta t_1' = \Delta t_2' = T_1 - (\left\lfloor \frac{T_1}{\Delta t_1} \right\rfloor - 1)\Delta t_1$ =0.066087，

$p = \frac{e^{r\Delta t_1} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t_1}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t_1}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t_1}}}$ =0.507205，$q = 1 - p$ =0.492795，接下來要對 G 與 G_1 取他們連接到 T_2 第一期的機率，不過在本例當中 $L_1 = L_2$、$H_1 = H_2$ 且 $\Delta t_1 = \Delta t_2$，G 與 G_1 它

們連接到T_2第一期的三個機率會剛好一模一樣，故我們只列舉其中一個的求法，以 G 為例，和 G 價值最近的為 J，先求 $\mu_2 \equiv (r-\sigma^2/2)\Delta t_2^{'}$ =0.001239 與 $Var_2 \equiv \sigma^2 \Delta t_2^{'}$ =0.00413，注意在此求P_{2_u}、P_{2_m}、P_{2_d}時需要用到的α_2、β_2、γ_2是以 G 的價值為底數，故 $\beta_2 = \hat{\mu}_2 - \mu_2 = \ln(\frac{S_0 \times e^{l+5\sigma\sqrt{\Delta t_2}}}{S_0 \times e^{l+4\sigma\sqrt{\Delta t_1}}}) - \mu_2$ =0.046708，$\alpha_2 = \beta_2 + 2\sigma\sqrt{\Delta t_2}$ =0.142602，$\gamma_2 = \beta_2 - 2\sigma\sqrt{\Delta t_2}$ =-0.04919，經由(4)、(5)、(6)式



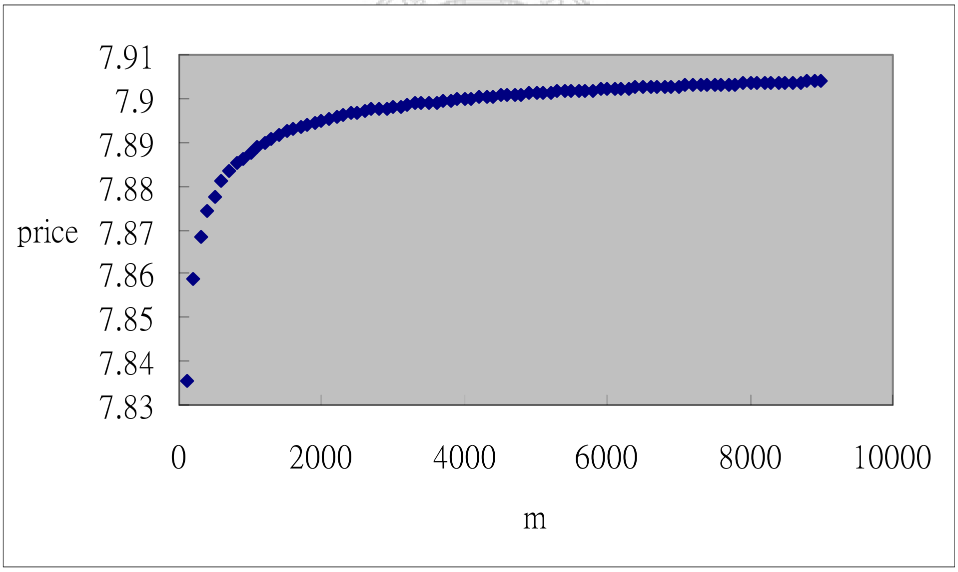
圖(十三) $L_1 = L_2 = 90$ $H_1 = H_2 = 120$ 之下的 TBT

求得P_{2_u} =0.099669、P_{2_m} =0.313584、P_{2_d} =0.586747，再求$\mu_1 = \mu_2$ =0.001239 與 $Var_1 = Var_2$ =0.00413，找到 $E \in [\mu_1 - \sigma\sqrt{\Delta t_1}, \mu_1 + \sigma\sqrt{\Delta t_1})$，所以取 $\hat{\mu}_1$ 為 $l_1 + 3\sigma\sqrt{\Delta t_1}$ =0.038481，故$\beta_1 = \hat{\mu}_1 - \mu_1$ =0.037241，$\alpha_1 = \beta_1 + 2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$ =0.133135，

$\gamma_1 = \beta_1 - 2\sigma\sqrt{\Delta t_1}$ =-0.05865，經由(7)、(8)、(9)式解得 P_{1_u} =0.105817、P_{1_m} =0.400006、P_{1_d} =0.494177，最後再由 Backward Induction 可以求得選擇權的價值應該為 1.215546。

4 數值結果

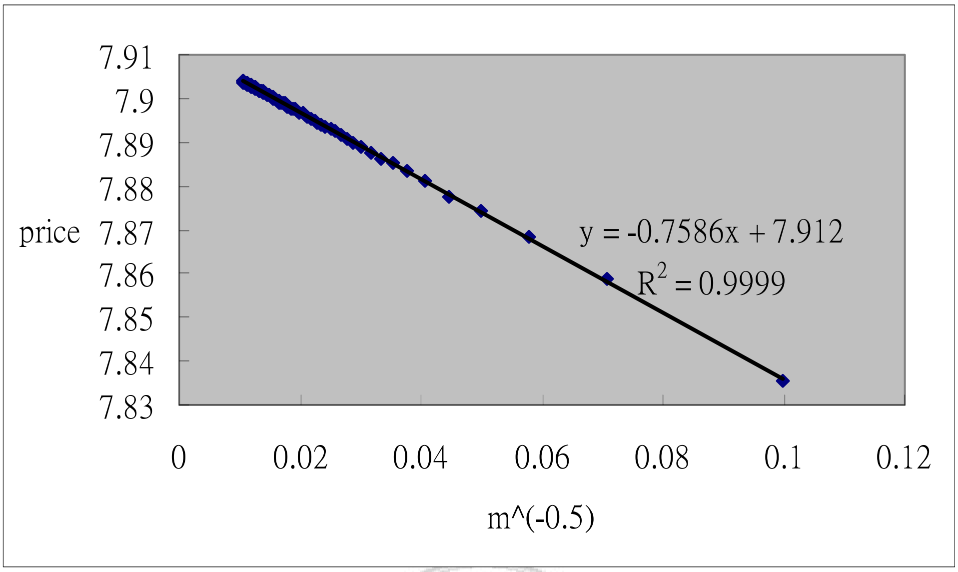
在這裡我們以實際的數值例子來觀察 TBT 模型評價的收斂情形，首先來看一看 TBT 針對 Discrete Single Barrier Options 所做的評價結果，假定標的物價格為 100，到期為 0.5 年，履約價格為 100，無風險利率為 0.05，標的物價格的波動度為 0.25，barrier 為 90，monitoring frequency 為 5，意即T'的值為$T/5$，以橫軸代表 barrier 之間所切割的期數m，縱軸代表評價所得的結果，在圖(十四)當中我們可以看到隨著 barrier 之間所切割的期數m越來越大，所得到的評價結果將漸漸的收斂。



圖(十四) TBT 對 Discrete Single Barrier Options 的資料收斂

接下來，我們另外以橫軸表示$\frac{1}{\sqrt{m}}$，仍然以縱軸表示評價所得的結果，就可以看到如圖(十五)的結果，可以看出模型的評價誤差會以$O(m^{-\frac{1}{2}})$的速度收斂，若是以圖中的資料做線性迴歸，再根據外插法可以推得：當 barrier 之間所切的期數m越趨近於無窮大之時，評價結果將趨近於 7.9128，為了便於觀察結果我們另

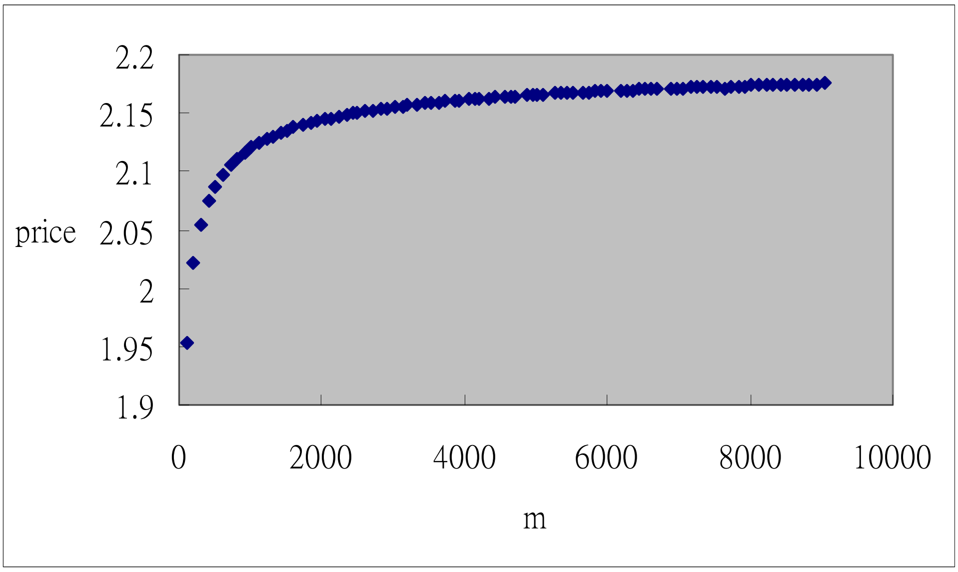
外以 Monte Carlo Simulation 重複 1000000 次的結果為 7.912437，與我們所得到的數值結果是相當吻合的。



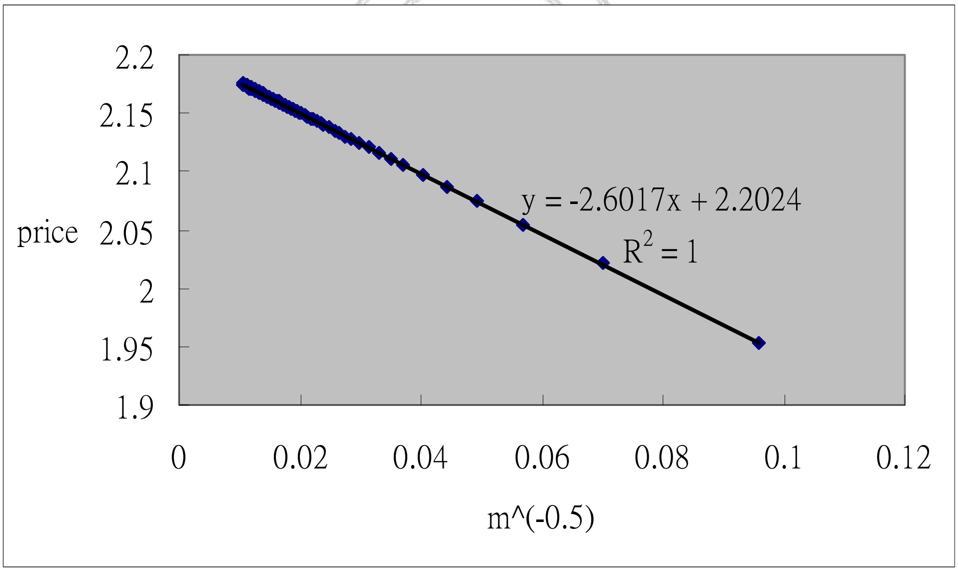
圖(十五) Discrete Single Barrier Options 圖形資料的線性迴歸

接著來看一看 TBT 針對 Discrete Double Barrier Options 所做的評價結果，假定標的物價格為 100，到期為 0.5 年，履約價格為 100，無風險利率為 5%，標的物價格的波動度為 25%，barrier 每期皆為 90 與 120，monitoring frequency 為 5，意即 barrier 之間的間隔時間為 $T/5$，以橫軸代表 barrier 之間所切割的期數 m，縱軸代表評價所得的結果，在圖(十六)當中我們也可以看到隨著 barrier 之間所切割的期數 m 越來越大，所得到的結果將漸漸的收斂。

另外同樣以橫軸表示 $\frac{1}{\sqrt{m}}$，縱軸表示評價所得的結果，可以看到如圖(十七)的結果，和 Discrete Single Barrier Options 相同，模型的評價誤差同樣以 $O(m^{-\frac{1}{2}})$ 的速度收斂，若是以圖中的資料做線性迴歸，再根據外插法可推得：當 barrier 之間所切的期數 m 越趨近於無窮大之時，評價結果將趨近於 2.2024，如果我們另外以 Monte Carlo Simulation 重複 1000000 次的所得到的結果為 2.204528，與我們所得到的數值結果同樣也是相當吻合的。



圖(十六) TBT 對 Discrete Double Barrier Options 的資料收斂(1)

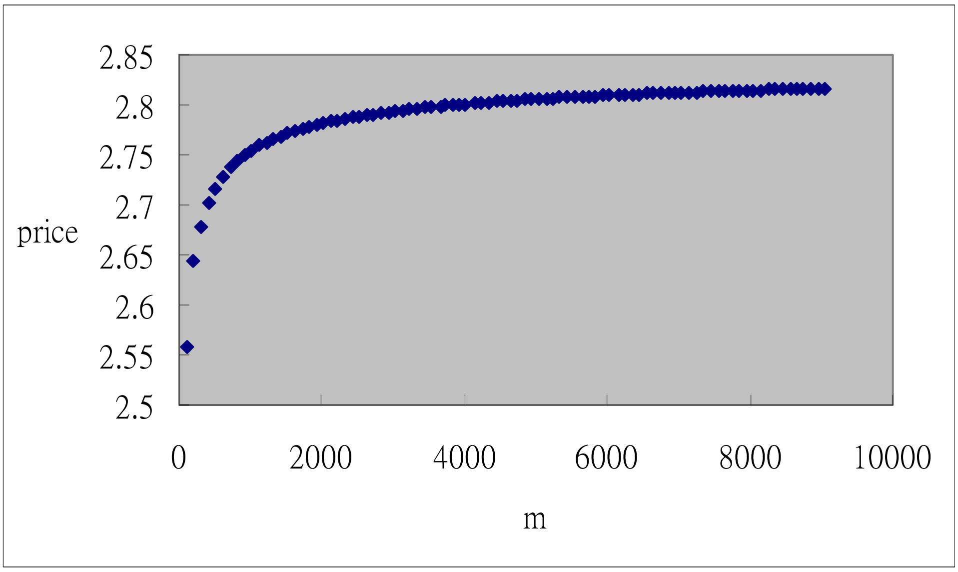


圖(十七) Discrete Double Barrier Options 圖形資料的線性迴歸(1)

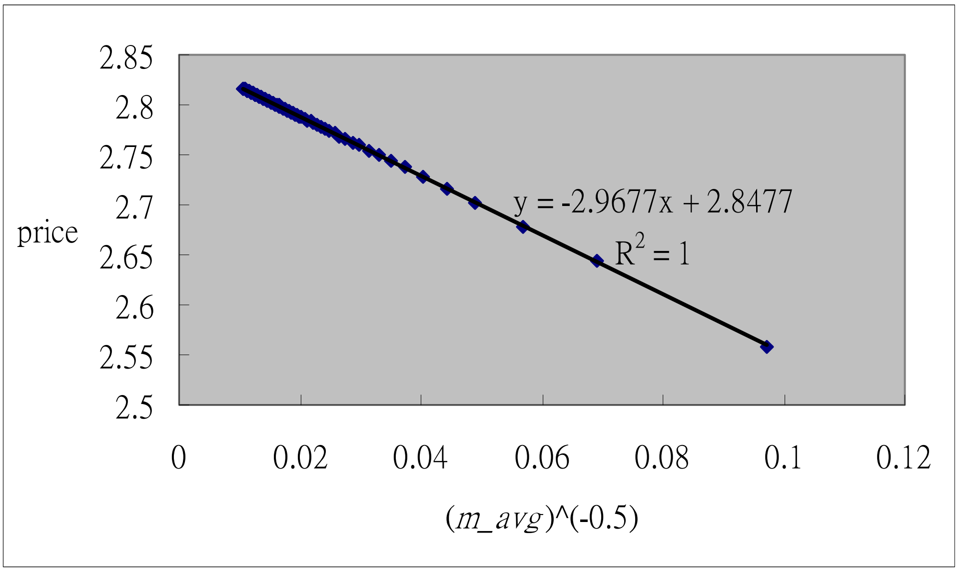
接下來再更進一步，假定標的物價格為 100，到期為 0.5 年，履約價格為 100，無風險利率為 5%，標的物價格的波動度為 25%，barrier 每期的 barrier 依次為{90,120}、{91,121}、{92,122}、{93,123}、{94,124}，monitoring frequency 為 5，意即 barrier 之間的間隔時間 $T/5$，由於在這樣的情況之下，barrier 之間所切割的期

數並不一定相同，但由於 barrier 之間的間隔時間是相同的，所以我們採用另一個新的值 m_avg ，它是表示 barrier 之間所切割的期數之平均值，譬如說從開始到第一個 barrier 之間被切割爲 3 期，第一個 barrier 到第二個 barrier 之間被切割爲 4 期，第二個 barrier 到第三個 barrier 之間被切割爲 4 期，第三個 barrier 到第四個 barrier 之間被切割爲 6 期，第四個 barrier 到第五個 barrier 之間被切割爲 3 期，在這樣的情況下就取 $m\_avg = \frac{3+4+4+6+3}{5} = 4$ ，現在以橫軸表示 m_avg ，縱軸代表評價所得的結果，在圖(十八)當中我們也可以看到隨著 barrier 之間所切割的平均期數越來越大，所得到的結果將漸漸的收斂。

仿照前例以橫軸表示 $\frac{1}{\sqrt{m\_avg}}$ ，縱軸表示評價所得的結果，可以看到如圖(十九)的結果，模型的評價誤差是以 $O((m\_avg)^{-\frac{1}{2}})$ 的速度收斂，若是以圖中的資料做線性迴歸，再根據外插法可推得：當 barrier 之間所切割期數的平均值 m_avg 越趨近於無窮大之時，評價結果將趨近於 2..8477，果我們另外以 Monte Carlo Simulation 重複 1000000 次的所得到的結果爲 2.847314，所得到的數值結果同樣和模型相當吻合。



圖(十八) TBT 對 Discrete Double Barrier Options 的資料收斂(2)



圖(十九) Discrete Double Barrier Options 圖形資料的線性迴歸(2)

我們可以仔細的觀察圖(十四)、圖(十六)和圖(十八)，不論是在 Discrete Single Barrier Options 的情況還是 Discrete Double Barrier Options 的情況下，TBT 的收斂都是相當穩定的，不會有很明顯的跳動產生，由此可見 TBT 在建構時讓節點能夠準確的建構在含有 barrier 的節點之上，真的可以讓非線性誤差降低許多，收斂比單純使用 CRR 二元樹評價時還要穩定不少。

5 結論

當評價障礙選擇權的時候，若是建構的模型無法讓模型中的節點通過障礙的節點時就會產生非線性誤差，讓模型的評價結果可能產生數值跳動的情形，有可能模型所切割的期數已經相當大，但是所得到的結果和實際的選擇權價格仍有一段差距，譬如說使用 CRR 二元樹去評價障礙選擇權時就會發生此種情形，但是二元樹的結構有許多相當好的性質可以使用，譬如使用組合數學可以讓二元樹的評價效率比直接使用 Backward Induction 還要來的好，TBT 的建構不但可以讓模型本身完美的通過障礙節點，而且還保有二元樹的結構，這一篇論文則是把 TBT 的應用層面作進一步的推廣，TBT 在針對 continue 的障礙選擇權已經有相當好的評價結果，我們本文當中再把 TBT 應用在 discrete 的障礙選擇權上，可以看出 TBT 在 discrete 的障礙選擇權依然能夠讓評價結果獲得穩定的收斂，希望能夠讓 TBT 在應用方面有更進一步的提升，讓 TBT 擁有更廣泛的實用性。

References

[1] Andricopoulos, A.D, Widdicks, M., Duck, P.W., and Newton, D.P. (2003) “Universal option valuation using quadrature methods.” *Journal of Financial Economics*, 67 , pp. 447-471

[2] John C. Hull, (2003) *Options, Futures and Other Derivatives.* Fifth Edition (Prentice-Hall International,)

[3] Chih-Jui Shea. (2006) Valuation of numerical methods for discrete barrier options : the adaptive mesh model and other competing techniques. Master’s Thesis. Department of Finance, National Taiwan University, Taiwan.

[4] Tsai, Shao-Hwai. (2004) Pricing discrete double-barrier options with the quadrature method. Master’s Thesis. Department of Finance, National Taiwan University, Taiwan.

[5] Ko, Kun- Yi. (2003) Fast accurate option valuation uing Gaussian qadrature. Master’s Thesis. Department of Finance, National Central University, Taiwan.

[6] Dai, T.-S., Y.-D. Lyuu, C.-J. Shea., (2006) The trino-binomial tree model: a simple, and efficient tree model

[7] Hong-yiu Lin. (2006) Fast fourier transform with applications to pricing discrete european barrier options under binomial and trinomial tree models. Master’s Thesis. Department of Finance, National Taiwan University, Taiwan.

[8] 戴天時，C++財務程式設計，民國九十四年，財團法人 中華民國證券暨期貨市場發展基金會

[9] 陳威光，衍生性金融商品，選擇權 期貨與交換，2005 年，智勝文化事業有限公司