從市場殖利率資料推導零息利率曲線

- 由於市場上提供的殖利率資料通常只有到 30年期，因此30 年後的其餘零息利率須以30年零息利率做**Smith-Wilson**法得出。

參考美國
殖利率資料

Daily Treasury Rates | U.S. Department of the Treasury

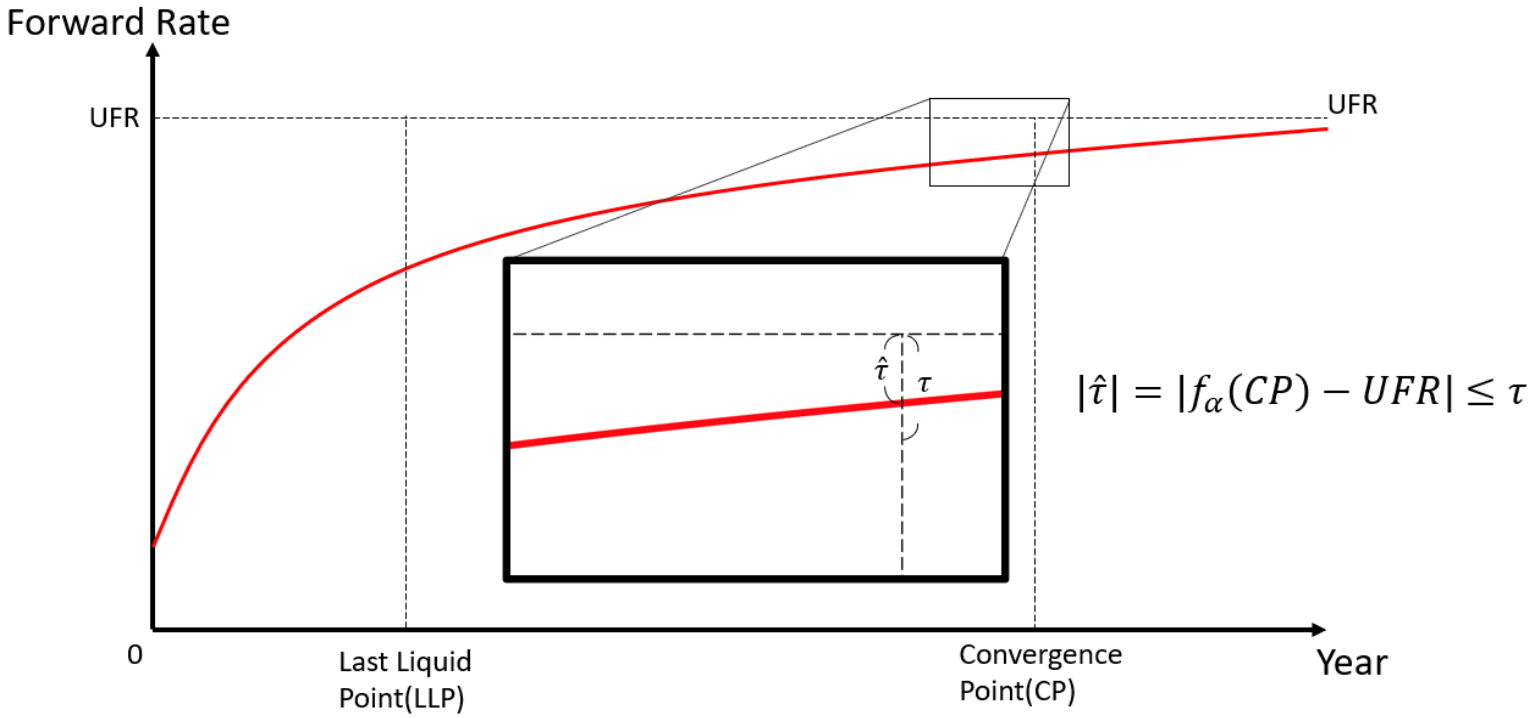
Smith-Wilson 方法：

- Smith-Wilson 方法是 Solvency II 架構下用來建構整體無風險折現率曲線（Risk-Free Discount Curve）的標準方法

- 核心目的:將市場可觀察期間內的利率進行平滑擬合，並在超過市場可觀察期限後，透過外推使遠期利率自然收斂至終極遠期利率（Ultimate Forward Rate, UFR），以滿足保險負債評價（如 Solvency II 及 IFRS 17）對折現率一致性與穩定性的要求。

- 常見國家UFR(2025):澳洲:3.5%-4%
  歐元區：3.75%
  美元區：3.5%

以S-W方法建構利率曲線流程



- **fα (CP)**：代表在收斂點（Convergence Point)算出來的**遠期利率 (Forward Rate)**。
- **UFR**：這是我們最終理想的目標利率（Ultimate Forward Rate）。
- **τˆ**：這是**實際的差距**，即模型算出來的值跟 UFR 差了多少。
- **τ**：這是監理機關規定的**門檻值（上限）**。

操作流程：

1. 讀入**市場殖利率或零息利率資料**
2. 轉成**連續複利的零息利率（ZCR）**
3. 算出**市場零息債價格（ZCB）**
4. 用 **Wilson Kernel** 建立 W 矩陣
5. 解線性方程求出 **η（校準參數）**
6. 用 Smith-Wilson 公式外推**長天期零息利率**

1.讀入市場殖利率資料

以美國2022/06/27殖利率資料舉例:

date	1 mo	2 mo	3 mo	4 mo	6 mo	1 yr	2 yr	3 yr	5 yr	7 yr	10 yr	20 yr	30 yr
06/27/2022	1.16	1.57	1.79		2.56	2.89	3.08	3.21	3.24	3.27	3.2	3.56	3.31

```
% === 處理殖利率資料 ===
x = [ 1/12   1/6    1/4   1/2   1   2   3   5   7   10  20  30 ];  % 可觀察期限(年)
y = [1.16, 1.57, 1.79, 2.56, 2.89, 3.08, 3.21, 3.24, 3.27, 3.20, 3.56, 3.31] / 100;  % 年化殖利率
```

2.轉成連續複利的零息利率（ZCR）

queryTenors = 0.5:0.5:30;

```
yy = spline(x, y, queryTenors);   % 插值殖利率
ZCR = log(1 + yy);                % 轉為連續複利 spot rate
```

這裡做了兩件事：

1. Spline 插值：補齊半年一期的期限

2. 簡單年化 → 連續複利

3.由 Zero Rate → Zero Coupon Bond 價格

```
ZCB = exp(-ZCR .* queryTenors);
```

對應數學公式:

$$P(0,t) = e^{-r(t)\cdot t}$$

Smith-Wilson 不是直接 **fitting rate**
而是 **fitting** 折現因子（價格）

4.用 Wilson Kernel 建立 W 矩陣

對於任兩個到期時間 t（目標年期）與 u（市場觀測點），
Wilson Kernel 定義為兩部分的乘積：

$$W(t,u) = \underbrace{e^{-UFR(t+u)}}_{f(t,u)} \times \underbrace{\left[\alpha \min(t,u) - e^{-\alpha \max(t,u)} \cdot \sinh(\alpha \min(t,u))\right]}_{H(t,u)}$$

Wilson Kernel 的作用:

1.它決定了在某個市場觀測點 u 發生的變動，會如何影響到其他年期 t。

2.最終的利率曲線是由許多個 Wilson Kernel 疊加而成的。

```
%定義 Wilson 核心函數
function W = Wilson(t, u, alpha, UFR)
    tau = min(t, u);
    gamma = max(t, u);
    sinh_term = (exp(alpha * tau) - exp(-alpha * tau)) / 2;
    W = exp(-UFR * (t + u)) * (alpha * tau - sinh_term * exp(-alpha * gamma));
end
```

這個公式設計確保了:

(1)市場的影響力會隨時間慢慢消失(長期收斂至UFR)

當想預測的年限 t 增加

f(t,u)部分：這是一個負指數項。當年現 t 變大時， 會嚴格遞減。

H(t,u)部分：當年期 t 變得很大時，H(t,u) 會趨於一個固定的數值αmin(u) 。

當年期 t 越遠，W(t,u) 就越小，強迫市場的影響力在未來慢慢消失，回歸 UFR。

(2)確保曲線平滑

$$H(t,u) = \alpha \min(t,u) - e^{-\alpha \max(t,u)} \sinh(\alpha \min(t,u))$$

對目標年期 t 進行一階求導：

$$\frac{dH(t,u)}{dt} = G(t,u) = \begin{cases} \alpha - \alpha e^{-\alpha u} \cosh(\alpha t) & t \le u \\ \alpha e^{-\alpha t} \sinh(\alpha u) & u \le t \end{cases}$$

二階求導結果:

$$\frac{d^2H(t,u)}{dt^2} = \alpha^2 H(t,u) - \alpha^3 \min(t,u)$$

這部分的數學構造保證了曲線在所有點都具備 C^2 特性，讓最終畫出來的 Yield Curve 都沒有『尖點』或『折角』。

4.建立W 矩陣（ N×N ）

```
% 建立 W 矩陣
W = zeros(N, N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        W(i,j) = Wilson(queryTenors(i), queryTenors(j), alpha, UFR);
    end
end
```

- 每一個市場期限彼此都透過 Wilson Kernel 連動
- 這個矩陣代表「**市場點彼此的關聯程度**」

假設我們現在有 3 個市場觀測點（N=3），那麼W**是一個3×3矩陣**如下：

$$W = \begin{bmatrix} W(1,1) & W(1,2) & W(1,3) \\ W(2,1) & W(2,2) & W(2,3) \\ W(3,1) & W(3,2) & W(3,3) \end{bmatrix}$$

由 Wilson Kernel 公式算出來的**正定矩陣**

5. 解線性方程：求出市場修正權重 η (Nx1)

對應數學式: $\mathbf{W}\eta = \mathbf{P}^{mkt} - \mathbf{P}^{UFR}$

- $\mathbf{P}^{mkt}$ 市場觀測到的零息債券價格向量。
- $\mathbf{P}^{UFR}$ 僅考慮 UFR 時的理論價格向量。

η 是一組「權重」，用來確保模型產出的價格精確等於市場觀測價格。

因為W是正定矩陣，所以W^{-1}存在，對於線性方程組 $\mathbf{W}\eta$ =y，我們可以解出唯一的 $\eta = W^{-1}y$

```
% 建立 UFR 折現曲線（理論價格）
u = exp(-UFR * queryTenors)';

% 計算 η 向量
eta = W \ (ZCB' - u);
```

6.用 Smith-Wilson 公式外推長天期零息利率

對應數學式：

$$P(t) = e^{-\mathrm{UFR}t} + \sum_i \eta_i W(t, u_i)$$

$$P(t) = e^{-r(t)\cdot t} \quad \Rightarrow \quad r(t) = -\frac{1}{t}\ln P(t)$$

- **觀測段** $:\mathfrak{t}$ 最後一個市場點（如 30 年）。此時曲線會精確通過所有市場點。

- 當 $t \to \infty$ 時：
  - $\sum \eta_i W(t, u_i) \to 0$（市場修正訊息消散）。
  - $P(t) \approx e^{-UFR\cdot t}$。
  - 因此，$r(t) \to UFR$。

```
    N = length(eta);
    w_new = zeros(1, N);
    for i = 1:N
        w_new(i) = Wilson(t, tenors(i), alpha, UFR);
    end
    discount = exp(-UFR * t) + w_new * eta;
    r = -log(discount) / t;
end
```

如何用 3 個η算出第 10 年？
假設我們已經在第一階段解出了η_1, η_2, η_3（分別對應 1, 2, 3 年期）。現在我們要算第 10 年的價格 P(10)，公式如下：

$$P(10) = e^{-UFR \cdot 10} + \eta_1 W(10,1) + \eta_2 W(10,2) + \eta_3 W(10,3)$$

η是固定的「影響力權重」：η_1, η_2, η_3已經包含了1~3 年的市場訊息。

W(10, 1)：計算「10 年」與「1 年」的數學關聯。
W(10, 2)：計算「10 年」與「2 年」的數學關聯。
W(10, 3)：計算「10 年」與「3 年」的數學關聯。

- **加權總和**：模型會根據這三個點對 10 年的「殘餘影響力」，加總出一個修正值。

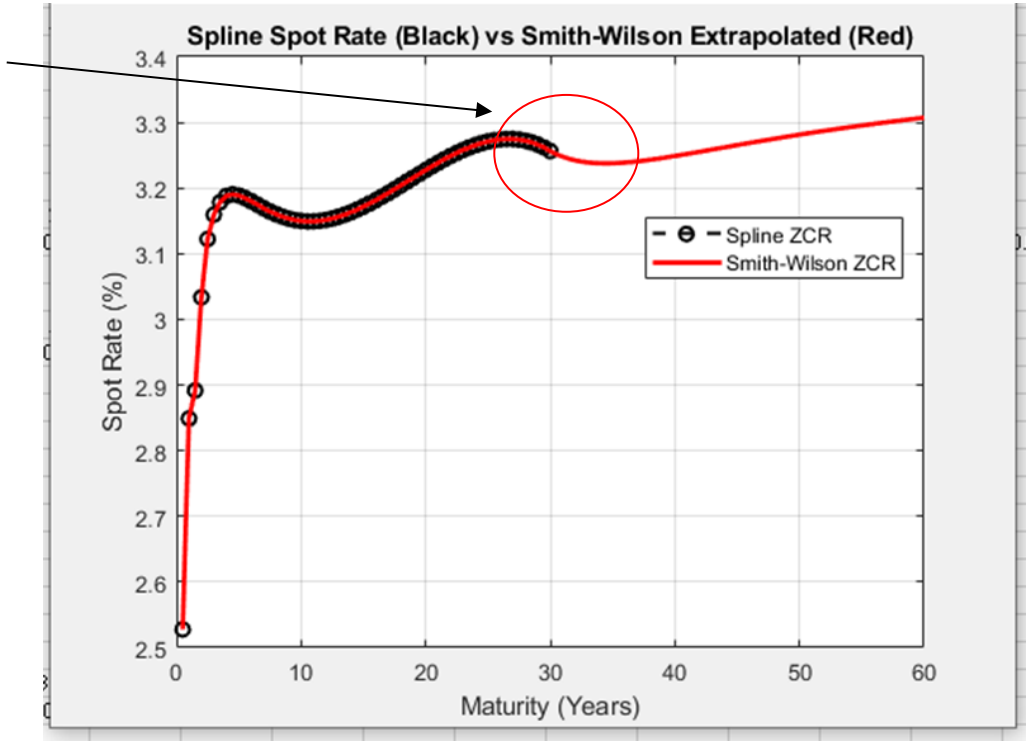
輸出結果(美國2022/06/27)

曲線表現

•**短中端 (0-30Y):** Smith-Wilson 曲線貼合市場觀測點，保持平滑且不產生震盪。

•**長端 (30-60Y):** 當市場缺乏資料時，紅色曲線順著趨勢向 UFR (3.5%) 方向收斂。

為了滿足平滑要求，曲線在進入 30 年外推區初期，會先**繼承市場末端的下跌慣性**，因此曲線會順著趨勢繼續下降。



結論： Smith-Wilson 模型有效解決了長天期折現率缺口問題，提供了一條既符合市場現況又具備長期穩定性的利率基準線。

項目	線性外插法	Smith-Wilson 方法
核心目標	利率平滑拉到目標值	價格理論一致地收斂至 UFR
是否貼合市場	不一定	完全貼合（perfect fit）
需要多少參數	1 個（終端利率）	2 個（UFR + α）
收斂可控性	無法控制收斂速度	可透過 α 控制收斂速度
適合用途	初步模擬、簡單模型	嚴謹風險管理、保險監理等用途