Kelly formula

0653943 賴彥儒

2018/04/17

起源

- John Larry Kelly, Jr.於1956年在《貝爾系統技術期刊》中發表
- 用以使特定賭局中，擁有**正期望值之重複賭局**長期**增長率最大化**的公式，計算出每次賭局應投注的資金**比例**。
- 除可將長期增長率最大化外，此方程式使在任何一次賭局中，假設貨幣可無窮分割，就不存在失去全部現有資金的可能，因此不存在破產疑慮。
- 若賭局可重複進行，只要資金**足夠多**，在實際應用上不成問題。

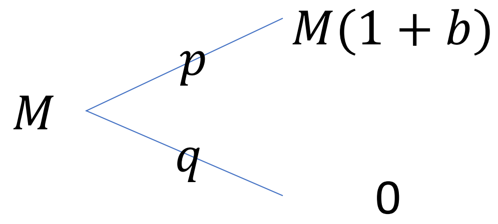
Kelly formula

$$f^* = \frac{bp - q}{b} = \frac{\text{期望盈利}}{\text{預期虧損}}$$

- f^*:投入資產佔本金比率
- b :賠率
- p :勝率
- q :敗率

如何看待賠率？

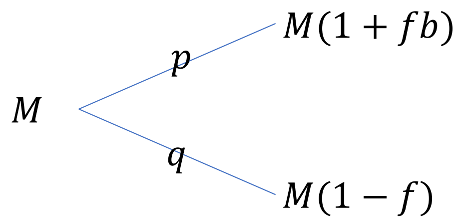
- 賠率b，即賭客獲勝時，下注M元可以獲得(1+b)M
- 若某賭局莊家設定賭客的勝率p，公平賭局下，賠率$b = \frac{1}{p} - 1$



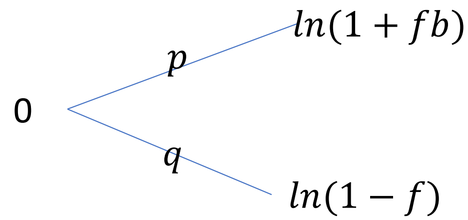
$$M = p\big(M(1+b)\big) + q * 0 \Rightarrow b = \frac{1}{p} - 1$$

推導Kelly formula：

- 本金M元， 勝率p ，敗率q， 賠率b，每次投入f比例的本金



本金



報酬率

目標：尋找使報酬率期望值最大的f

- 報酬率期望值 $E = pln\frac{M(1+fb)}{M} + qln\frac{M(1-f)}{M} = pln(1+fb) + qln(1-f)$

推導Kelly formula：

$$\max_f E = \max_f \{pln(1+fb) + qln(1-f)\}$$

$$\frac{dE}{df} = \frac{pb}{1+fb} + \frac{-q}{1-f} = 0 \quad \Rightarrow \frac{pb}{1+fb} = \frac{q}{1-f}$$

解得 $\boxed{f^* = \frac{bp-q}{b}}$

Check(二次微分小於0):

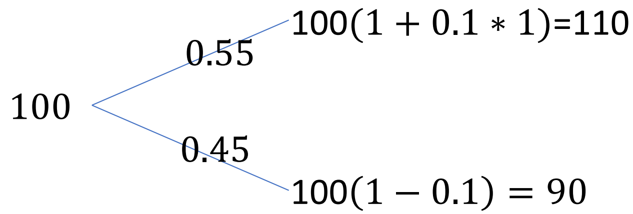
$$\frac{d^2E}{df^2}\left(\frac{bp-q}{b}\right) = -\frac{pb^2}{\left(1+\frac{bp-q}{b}b\right)^2} - \frac{1-p}{(1-\frac{bp-q}{b})^2} < 0$$

Example:

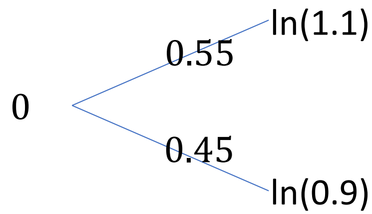
- 一個可重複進行的賭局：
- 本金100，賭客**自認**有55%獲勝，45%失敗，賠率b=1
- 不限下注金額m，獲勝可得下注兩倍金額2m，失敗全無

  …事實上，這狀況對莊家不利，因賭客期望報酬 = 0.55*2m+0-m = 0.1m>0

- 利用凱利公式可計算出每一次下注的本金比例$f^* = \frac{1*0.55-0.45}{1} = 0.1$



本金

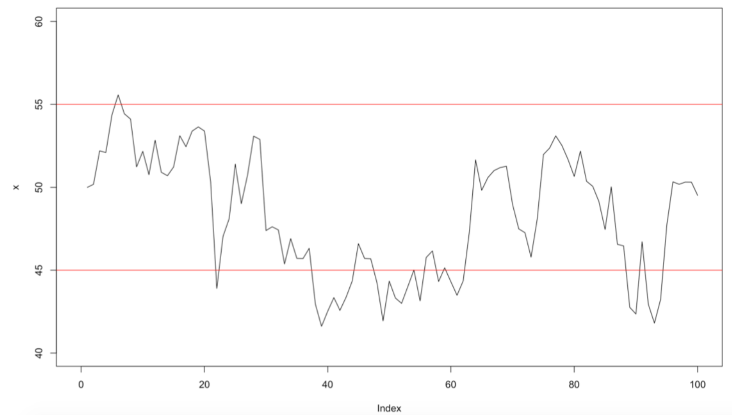


報酬率

- 賭局版凱利公式只有在穩贏（贏機率=100%）時才會支持押下全部本金，否則都是本金的一定比例。
- 隨著本金的減少，下的注也越來越少。
- 如果無交易費用，且金錢可無限分割，則絕對不會有破產的情況

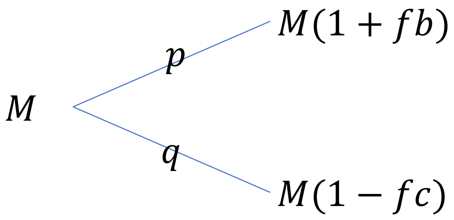
在股票市場的應用

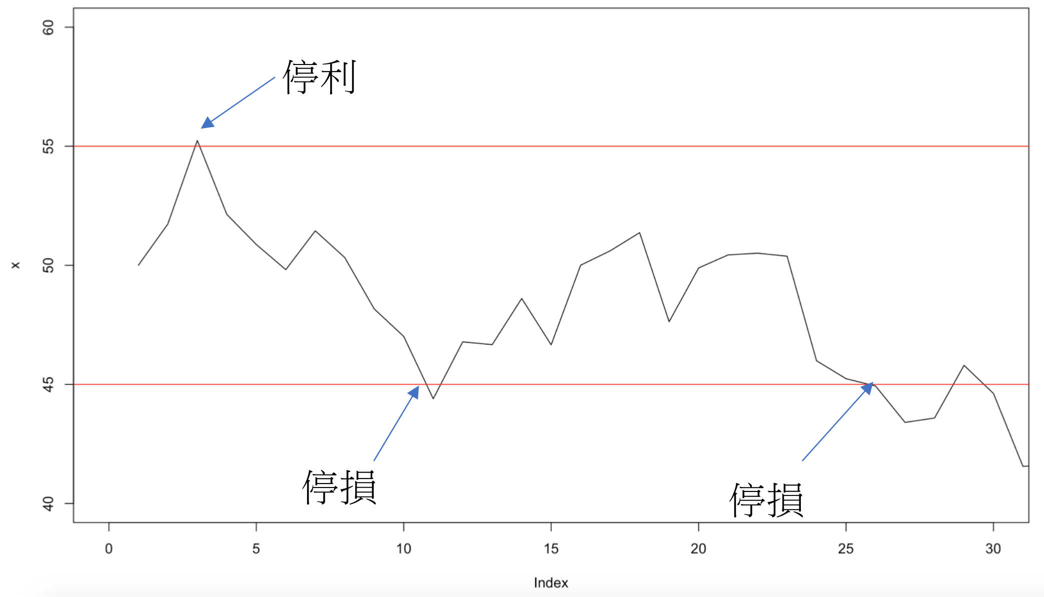
- 我們就投資股票的過程轉換成一個**賭博**的過程。
- **信號**發出為入場點。(ex:5日線穿過20日線,成交量,財報…)
- 停利停損發生時，為出場點。
- 賠率(b)和損失率(c)就是停利停損價與入場價格之比率。
- 一次入場和出場就相當於賭博模型中的單次賭博，單次賭博的倉位由凱利公式確定。



如何獲得參數p,q,b,c？

- 勝敗率p,q可由過去**回測勝率**得到
- 賠率b與損失率c可由設置停利與停損點來計算求得

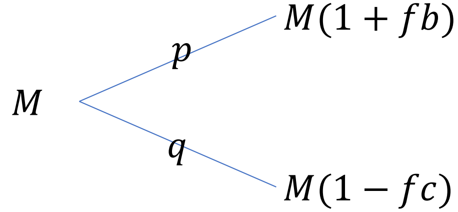




- 報酬率期望值 $E = p\ln\frac{M(1+fb)}{M} + q\ln\frac{M(1-fc)}{M}$

$$= p\ln(1+fb) + q\ln(1-fc)$$

$$\frac{dE}{df} = \frac{pb}{1+fb} + \frac{-qc}{1-f} = 0 \quad \Rightarrow \frac{pb}{1+fb} = \frac{qc}{1-f}$$



解得 $\boxed{f^* = \frac{p}{c} - \frac{q}{b}}$

Example

- 假設股價目前50，設定停利點56，停損點40
- 則b=0.12，c=0.14
- 假設過去投資績效顯示勝率p=0.56, q=0.44
- 則可藉由凱利公式算出$f^* = \frac{0.56}{0.14} - \frac{0.44}{0.12} = 0.3333$

也就是目前以剩餘金錢的33%進場，長期下可以獲得最佳報酬增長

以幾何布朗運動觀點

- 假設某檔股票價格符合幾何布朗運動$B(t)$
- 即$S_t = S_0 e^{\left(u-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma B(t)} = S_0 e^{X(t)}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t) = X(t)$

則股票報酬率期望值 $E(X(t)) = \left(u - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$

建立投資組合：f比例的股票， $(1-f)$比例無風險資產

其中：無風險資產報酬=r_f

- 則投資組合報酬率期望值 $E = \left[(fu) - \frac{1}{2}(f\sigma)^2\right] + [(1-f)r_f]$

推導股票Kelly’s formula

$$\max_f E = \max_f \{fu - \frac{1}{2}(f\sigma)^2 + (1-f)r_f\}$$

$$\frac{dE}{df} = u - f\sigma^2 - r_f = 0$$

解得 $\boxed{f^* = \frac{u-r_f}{\sigma^2}}$

Check:

$$\frac{d^2E}{df^2} = -\sigma^2 < 0$$

實際如何應用？

- 使用個股歷史資料得到估計值$\widehat{u_t}, \widehat{\sigma^2{}_t},$
- $R_{f,t}$為無風險(公債)利率

- 可隨時間調整倉位$f_t = \frac{\widehat{u_t} - R_{f,t}}{\widehat{\sigma^2}_t}$（不考慮交易成本）

資產佔本金比率 f 不在0~1的case

- 若計算出的$f < 0$，表示不應該參與，或是做空
- 若計算出的$f > 1$，表示應該要融資，提高槓桿

必勝or必不敗

- 凱利公式建立在**過去的勝率**，不代表未來的勝率

  投資者可能有過度自信行為
- 停利＆停損

  不要賭上所有資產
- 黑天鵝

  賭博不太會受到石油價格、戰爭、金融危機影響，但股價會。

R demo

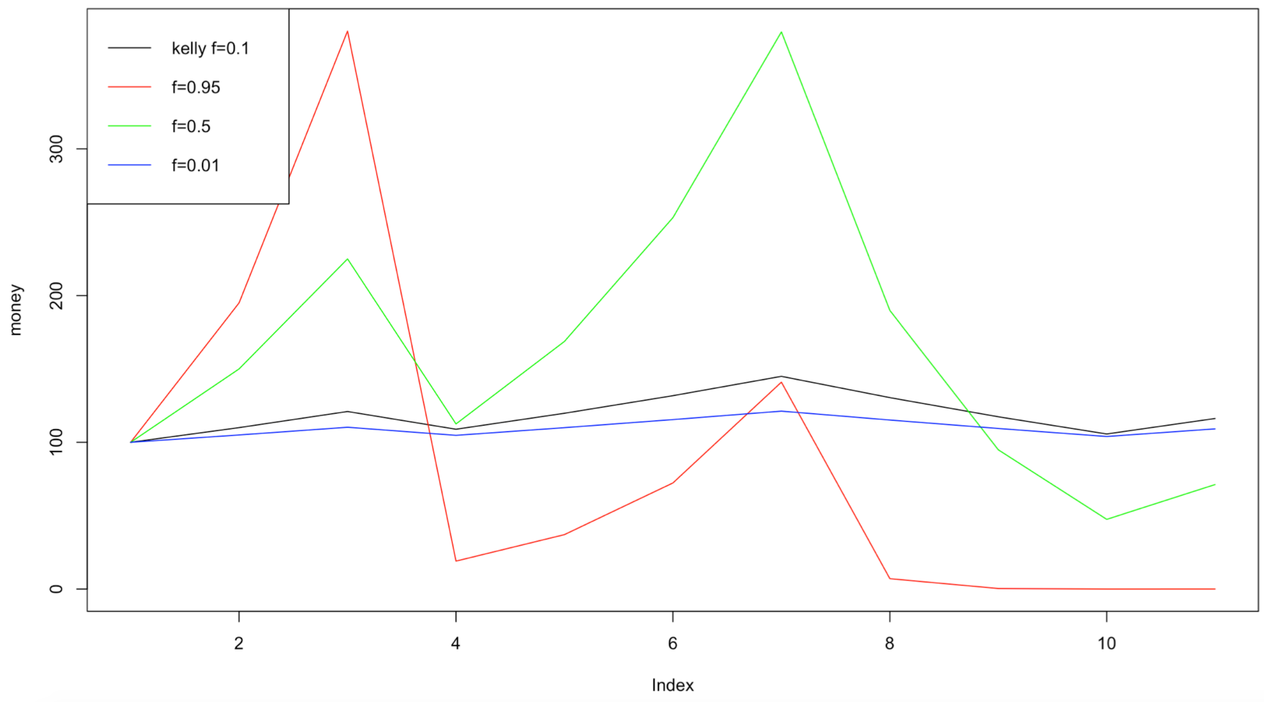
- 改變f比例，觀察不同遊戲次數下，金錢增長狀況
- 同先前賭局，本金100，賭客有55%獲勝，45%失敗，賠率b=1
  1. 每回合以本金0.95倍下注
  2. 每回合以本金0.5倍下注
  3. 每回合以凱利解，本金0.1倍下注
  4. 每回合以本金0.01倍下注

R code

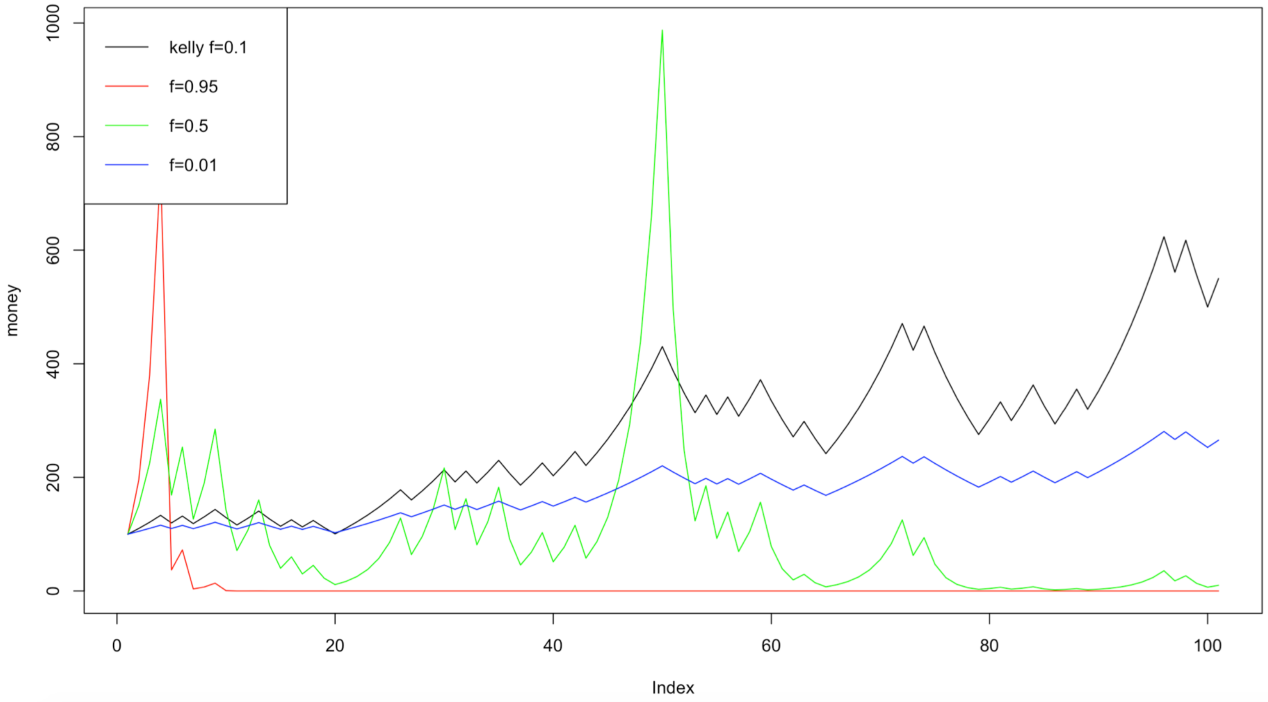
```
gtimes=1
winrate=0.55
b=1
f=(b*winrate-(1-winrate))/b

money=c(100)
for(i in 1:gtimes){
  cost=f*money[i]            #投注金額f*money
  G=rbinom(1,1,winrate)  #伯努力試驗
  money[i+1]=money[i]-cost+G*cost*(b+1)
}
```

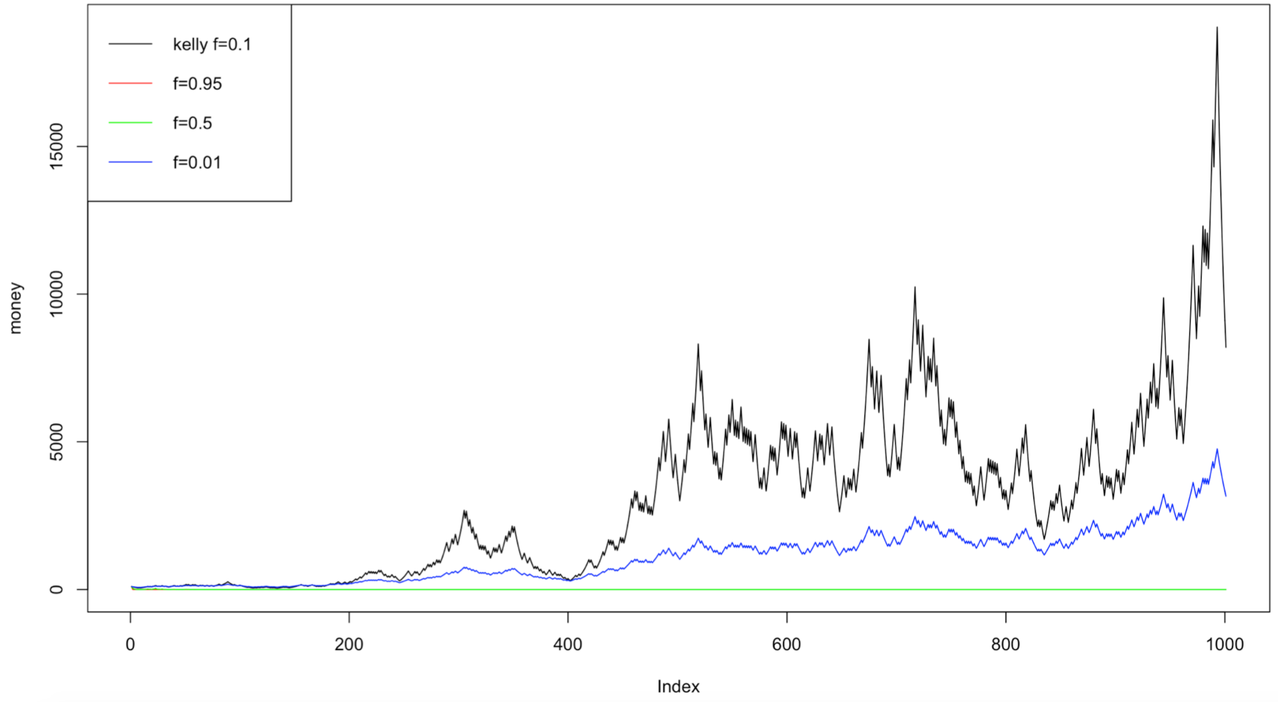
不同下注比例與次數的觀察g=10



不同下注比例與次數的觀察g=100



不同下注比例與次數的觀察g=1000



不同下注比例與次數的觀察g=5000